

Divulgaciones Matemáticas



Departamento de Matemática

p-ISSN 1315-2068

e-ISSN 2731-2437

Maracaibo - Venezuela



**Facultad
Experimental
de Ciencias**

Vol. 22 - No. 2 - 2021

Divulgaciones Matemáticas

Revista Matemática de la Universidad del Zulia
Facultad Experimental de Ciencias
Departamento de Matemática

Revista arbitrada, publicada de forma digital, de libre acceso, indizada en Latindex, Wordcat, Mirabel, MIAR, Dialnet, EuDML, Mathematical Reviews, MathSci online/CD-ROM, Zentralblatt für Mathematik, Revenicyt y REDIB. Se publica un volumen anual compuesto por dos números, que aparecen en junio y diciembre.

Comité Eitorial

Dr. Vinicio Ríos (LUZ)

Dr. Wilson Pacheco (LUZ)

Dr. Deivi Luzardo (LUZ)

Editor Jefe: Dr. Tobías Rosas Soto (trosas@demat-fecluz.org)

Editores Asociados: Dr. Vinicio Ríos, Dr. Wilson Pacheco

Editores Eméritos: Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R., Dr. José H. Nieto S., Dr. Genaro González, Dr. Daniel Núñez.

Editore Fundadores: Dr. Alirio J. Peña P., MSc. Ángel V. Oneto R.

Portada diseñada por Tobías Rosas Soto. Dirección Postal:

Revista Divulgaciones Matemáticas
Departamento de Matemática
Facultad Experimental de Ciencias
La Universidad del Zulia - Apartado Postal 526
Maracaibo, Estado Zulia
Venezuela

Correo electrónico: divulgaciones@demat-fecluz.org

URL: produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones

Depósito Legal pp 199302ZU392

p-ISSN: 1315-2068

Depósito Legal pe ZU2021000035

e-ISSN: 2731-2437

Compuesta con $\text{\LaTeX}$ y $\mathcal{A}_\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$ en el Departamento de Matemática de la Facultad Experimental de ciencias, Universidad del Zulia.

©1993 La Universidad del Zulia.

Universidad del Zulia
Maracaibo, Venezuela



DIVULGACIONES
MATEMÁTICAS

Vol. 22

2021

No. 2

Presentación

El Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* se complace en presentar el **Vol. 22, No. 2, 2021**. Los artículos contenidos en el presente volumen fueron recibidos entre el segundo semestre del año **2021**, los mismos fueron evaluados y aceptados para su publicación, antes de la edición del presente volumen.

Es importante notar que, a pesar de la poca demanda de artículos por parte de autores por diferentes razones, la revista logró recibir ocho (8) trabajos de los cuales dos (2) no aprobaron la etapa de evaluación por los árbitros respectivos. De manera que en este número se publican cinco (5) artículos en la sección de Artículos de Investigación, un (1) artículo en la sección de Artículos de Divulgación e Históricos. Por otro lado, en esta edición, en la sección de Problemas y Soluciones solo se proponen dos (2) problemas. Solo se propondrán problemas debido a la falta de afluencia de soluciones a los problemas propuestos anteriormente.

El trabajo editorial relacionado con este número es el resultado de mucho esfuerzo del Comité Editorial y del Editor Jefe de la revista. Los Editores queremos expresar nuestro agradecimiento a todos aquellos que hicieron posible este volumen: a los autores de los trabajos que se presentan, que dieron su voto de confianza a la revista; a los árbitros que evaluaron los artículos, cuya labor desinteresada permitió satisfacer los estándares de calidad de la revista y mejorar sensiblemente la forma de los trabajos; al equipo editorial de *Divulgaciones Matemáticas*. A todos, mil gracias.

La revista está ahora en el portal de *Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)* cuyo sitio web oficial es: produccioncientificaluz.org. Ahora los artículos están identificados con el membrete del *Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)*, y la revista pasa a tener como sitio web oficial produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones.

Es importante aclarar que la dirección web divmat.demat-fecluz.org continúa funcionando para obtener los números de la revista publicados antes del año 2016, hasta que los mismos sean trasladados en su totalidad al nuevo sitio web mencionado. Todo esto con la finalidad de darle más expansión y reconocimiento a la revista.

Por último, el Comité Editorial de *Divulgaciones Matemáticas* pide disculpas a los autores de los artículos aquí publicados por el notable retraso en la publicación de este número y por los inconvenientes que esto pudo haberles causados, les agradecemos su espera. Además, invitamos a la comunidad matemática venezolana e internacional a seguir dándonos su voto de confianza sometiendo sus trabajos en la revista para evaluación y posible publicación.

¹ Dr. Tobías Rosas Soto.

¹Editor en Jefe de *Divulgaciones Matemáticas* y editor del presente número

Presentation

The Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* is pleased to present the **Vol. 22, No. 2, 2022**. The articles contained in this volume are those received during the second semester of the year **2021**, which ones were evaluated and accepted for publication, before the edition of this volume.

It is important to note, that despite the low demand for articles by authors by different reasons, the journal could receive eight (8) works, of which two (2) did not approve the evaluation stage by the respective arbitrators. So, in this number are published five (5) articles in the Research Articles section, one (1) articles in the Expository and Historical Articles section. By other hand, in this edition, only two problems will be proposed in the Problems and Solutions section. Only problems will be proposed due to the lack of influx of solutions to the problems proposed previously.

The editorial work related to this issue is the result of the efforts of Editorial Board and the Chief Editor. The Editors want to express their gratitude to all of those who made this volume possible: to the authors of the presented works, who gave their vote of confidence to the journal; to the referees, who evaluated the articles with selfless work, guaranteeing the quality standards of the journal and significantly improving the way of working; to the editorial team of *Divulgaciones Matemáticas*. To all of them, thanks a lot.

The journal is now on the portal of *Revistas Científicas y Humanísticas de la Universidad del Zulia (ReviCyHLUZ)* whose official website is: produccioncientificaluz.org. Now the articles are identified with the letterhead of the *Sistema de Servicios Bibliotecarios y de Información de LUZ (SERBILUZ)*, and the journal has produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones as its official website.

It is important to clarify that the web address divmat.demat-fecluz.org continues working to obtain the issues of the journal published before the year 2016, until they are transferred in their entirety to the new website mentioned. All this in order to give more expansion and recognition to the journal.

Finally, the Editorial Board of *Divulgaciones Matemáticas* ask for apologize to the authors of the articles published here for the remarkable delay in the publication of this issue and for the inconvenience that this may have caused them, we thank them for the waiting. Furthermore, we invite the Venezuelan and international mathematical community to continue giving their support by submitting their articles to our journal for evaluation and possible publication.

² Dr. Tobías Rosas Soto.

²Chief Editor of *Divulgaciones Matemáticas* and editor of the present volume

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS

Vol. 22, No. 2, 2021

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación

(Research papers)

Análisis de conflicto en sistemas dinámicos de eventos discretos usando redes de Petri.

Analysis of conflict on discrete event dynamic systems using Petri nets.

Marcia Caicedo, Guelvis Mata, Bladimir Ruiz

1–9

Estructura algebraica de los autómatas finitos y lenguajes.

Algebraic structure of finite automata and languages.

Fernando Ortiz, Luz Solé

10–22

Qualitative study of a mathematical model for the transmission of COVID-19.

Estudio cualitativo de un modelo matemático para la transmisión del COVID-19.

Yuri Alcántara, Sandy Sánchez, Antonio Ruiz

23–33

Matriz de adyacencia de Ramsey del grafo $K_{R(G,H)}$ con componentes h -buenas y las relaciones geométricas entre lados y vértices de los grafos G , H y $K_{R(G,H)}$.

Ramsey adjacency matrix of the graph $K_{R(G,H)}$ with h -good components and the geometric relationship that exists between sides and vertices of the graphs G , H and $K_{R(G,H)}$.

José Figueroa, Felicia Villarroel, Henry Ramírez, Tobías Rosas

34–47

Notas sobre el desempeño de los estimadores fronteras de densidad con núcleo localmente adaptable y con conjunto difuso.

Notes on the performance of the boundary locally adaptive kernel and boundary fuzzy set density estimators.

Jesús Fajardo

48–65

Artículos de Divulgación e Históricos

(Expository and Historical papers)

Divulgación de algunos teoremas de la geometría moderna entre los siglos XVII y XIX.

Divulcation of some theorems of modern geometry between the XVII and XIX centuries.

Eduardo Orellana, Tobías Rosas

66–75

Problemas y Soluciones
(Problems and Solutions)

Tobías Rosas Soto. (Editor)

76–77

Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 1–9
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7487372>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Análisis de conflicto en sistemas dinámicos de eventos discretos usando redes de Petri

Analysis of conflict on discrete event dynamic systems using Petri nets

Marcia Caicedo (rociomar82@hotmail.com)
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4739-3855>
Instituto de Postgrado,
Universidad Técnica de Manabí
Av. Urbina y Che Guevara, 130103, Ecuador.

Guelvis Mata (gematad2017@gmail.com)
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7147-1422>
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes
Mérida, República Bolivariana de Venezuela

Bladismir Ruiz (bladismir@ula.ve)
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7737-3847>
Instituto de Ciencias Básicas
Universidad Técnica de Manabí
Portoviejo, 130103, Ecuador.

Resumen

Este manuscrito considera al modelo de redes de Petri como una herramienta útil para el análisis de conflictos en sistemas dinámicos de eventos discretos. Particularmente, tratamos al conflicto basados en la estructura de la red más allá de su comportamiento dinámico, estableciendo para ello argumentos teóricos centrados en la “independencia” entre eventos. Con mayor precisión, la conjugación entre algunas clases de redes tales como las redes seguras, de libre decisión, vivas y de libre escogencia caracterizan la ausencia de conflictos en la clase de sistemas nombrada arriba.

Palabras y frases clave: Sistemas de eventos discretos, redes de Petri, conflicto.

Abstract

This manuscript considers the Petri nets model as a useful tool for conflict analysis in dynamic systems of discrete events. In particular, we treat conflict based on the structure of the network beyond its dynamic behavior, establishing theoretical arguments focused on the “independence” between events. More precisely, the conjugation between some classes of networks such as secure, free-choice, live, and free-choice networks characterize the absence of conflicts in the class of systems named above.

Key words and phrases: Discrete event systems, Petri nets, conflict.

Recibido 12/06/2021. Revisado 28/08/2021. Aceptado 22/11/2021.
MSC (2010): Primary 37N35; Secondary 93C65.
Autor de correspondencia: Gelvis Mata

1 Introducción

Las Redes de Petri (*RP*) han sido desde su inicio (1962) de gran interés en la teoría y aplicaciones de redes para la modelación y análisis de sistemas concurrentes asincrónicos, incluyendo áreas de aplicación tales como sistemas de computación con programación concurrente y sistemas de multiprocesadores, protocolos de diseños y verificación en redes de computación [1, 2, 5]. Todos estos sistemas son caracterizados como Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos (*SDED*) y constituyen el contexto en el cual estaremos centrados.

Ahora, la complejidad resultante desde la no linealidad inherente y la dimensión del espacio de estados en los *SDED* conducen a dificultades inusuales tanto en diseño como en análisis [3, 6, 7]. En efecto, con diseños inapropiados, los *SDED* pueden ser conducidos a bloqueos y sobreflujos de capacidad, entre otros rasgos indeseables, permitiendo la degradación en la ejecución. Por lo tanto, es necesario contar con herramientas potenciales para detectar y corregir estos problemas. Nuestro objetivo consiste en el análisis de conflictos usando redes de Petri. Tempranamente, un conflicto en un *SDED* toma lugar cuando dos o más subsistemas están listos para ejecutar eventos u acciones diferentes cuyas ocurrencias dependen directamente de la utilización de una entidad compartida e indivisible; en consecuencia, la ausencia de conflicto expresa que cualquier evento en la evolución del sistema en el tiempo solo puede ser inhabilitado por su propia ocurrencia.

Convencionalmente, tal como es expuesto en [7, 8], las herramientas para el análisis de *SDED* usando *RP* están fundamentadas en dos técnicas: el árbol de Alcanzabilidad y las Ecuaciones Matriciales; y ambas son expresadas directamente en términos del comportamiento dinámico de la red. Sin embargo, la direccionalidad de los argumentos dados aquí para el análisis de conflicto está relacionada con la estructura propia de la red y no de su dinámica. Los resultados más resaltantes establecen, bajo ciertas condiciones, las relaciones más estrictas entre la ausencia de conflicto y la independencia de la ocurrencia de eventos, permitiendo desde un punto de vista teórico algunas caracterizaciones bajo estructuras de libre decisión, de libre escogencia, seguras y vivas.

La organización es como sigue: Comenzamos dando las definiciones básicas de la teoría de las *RP* e incluiremos su comportamiento dinámico. Luego, expresamos conceptualmente algunas de sus propiedades; para finalmente, establecer los resultados teóricos de análisis de conflicto.

2 Nociones preliminares

Con el propósito de incluir nuestro contexto, comenzamos con la definición formal de una red de Petri, sus marcaciones y su correspondiente grafo asociado para finalmente establecer la dinámica o el comportamiento dinámico de una red.

Una Red de Petri es un cuádruple $R = (L, T, E, S)$ donde $L = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ es un conjunto finito cuyos elementos serán llamados lugares, $T = \{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ es un conjunto finito cuyos elementos serán llamados transiciones, $L \cap T = \emptyset$, $E : T \rightarrow L^\infty$ es una función de entrada: para cada $t \in T$, $E(t) \in L^\infty$ es llamado multiconjunto de lugares de entrada para T (L^∞ denota el conjunto de todos los multiconjuntos sobre L para los cuales no hay limitación del número de ocurrencias de sus elementos); y $S : T \rightarrow L^\infty$ es una función de salida: para cada $t \in T$, $S(t) \in L^\infty$ es llamado multiconjunto de lugares de salida para t .

El comportamiento dinámico de la red comienza por considerar la representación de estatus de lugares: asociamos a cada lugar de la red un número natural que expresa el significado preciso de la condición o configuración lógica del lugar en el tiempo. Formalmente, una *RP* marcada es

un par $M = (R, m)$, donde R es una RP y $m : L \rightarrow \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, es una función llamada función de marcación (o marcación): para cada $l_i \in L$, $m(l_i) \in \mathbb{N}$ es llamado número de fichas en el lugar l_i ; la cual especifica un vector $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $n = \text{card}L$, $m_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$ con $m(l_i) = m_i$ [8].

Las RP marcadas pueden ser representadas por grafos dirigidos como sigue: los lugares son etiquetados por círculos y las transiciones por barras. Si un lugar l_i es un lugar de entrada para una transición t ; es decir $l_i \in E(t)$, entonces hay $|l_i, E(t)|$ (número de veces que l_i está en el multiconjunto de lugares de entrada $E(t)$) arcos dirigidos del correspondiente círculo a la correspondiente barra. Si un lugar l_j es un lugar de salida para la transición t ; es decir, $l_j \in S(t)$, entonces hay $|l_j, S(t)|$ (número de veces que l_j está en el multiconjunto de lugares de salida $S(t)$) arcos dirigidos de la correspondiente barra al correspondiente círculo. Finalmente, las fichas son representadas por puntos en el interior del círculo y, en consecuencia, la función de marcación es representada por el número de puntos en el interior de cada círculo. Enfatizamos que las RP vistas como una herramienta gráfica nos proveen de un método unificado para representar Sistemas Dinámicos de Eventos Discretos, permitiendo facilidad para modelar sus características: asincronización, secuencialidad, concurrencia, conflicto, exclusion mutua, etc; mostrando excelente visualización de las dependencias del sistema y focos de información local.

En cuanto al comportamiento dinámico de una RP debemos enfatizar que una marcación representa el estatus de cada uno de los lugares en la red. Así, ésta especifica exactamente el estado actual del sistema que establece las condiciones lógicas para la ocurrencia de eventos; luego, una vez que ocurra un evento las condiciones del sistema en general varían dando lugar a una nueva marcación o estado. Para ser más precisos, una transición $t \in T$ en una RP marcada $M = (R, m)$ es llamada habilitada si $m(l_i) \geq |l_i, E(t)|$, para todo lugar $l_i \in L$. En este caso también diremos que la transición t es habilitada por la marcación m . El conjunto de transiciones habilitadas por la marcación m es dado por $\mathcal{E}(m) = \{t \in T : m(l_i) \geq |l_i, E(t)|, \forall l_i \in L\}$.

Ahora, si $t \in \mathcal{E}(m)$ entonces la marcación m' dada por $m'(l_i) = m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)|$, $i = 1, 2, \dots, n$; $n = \text{card}L$, es llamada marcación alcanzable desde m por el disparo de t . Además, si $t' \in \mathcal{E}(m')$ y esta es disparada, obtenemos una marcación m'' , y así sucesivamente. Por lo tanto, se obtiene una función de cambio de marcaciones, la cual puede ser extendida de manera natural; es decir, si la función de cambio de marcaciones $\delta : \mathbb{N}^n \times T \rightarrow \mathbb{N}^n$, $n = \text{card}L$, es dada por $\delta(m, t) = m'$ donde $m'(l_i) = m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)|$, $i = 1, 2, \dots, n$; entonces su extensión es la función parcial $\widehat{\delta} : \mathbb{N}^n \times T^* \rightarrow \mathbb{N}^n$, dada por $\widehat{\delta}(m, \theta) = m$ y $\widehat{\delta}(m, \sigma t) = \delta(\widehat{\delta}(m, \sigma), t)$, $m \in \mathbb{N}^n$, $t \in T$, $\sigma \in T^*$. Aquí, T^* denota el monoide libre con unidad θ : T^* es el conjunto de todas las combinaciones finitas de elementos de T [4]. Finalmente, como $\widehat{\delta}$ es una extensión de δ no haremos distinción notacional entre ambas.

Note que la función parcial de cambio de marcaciones δ está definida en (m, t) sí, y solamente sí, $t \in \mathcal{E}(m)$.

Por su parte, en una RP marcada $M = (R, m_0)$, una marcación $m \in \mathbb{N}^n$, $n = \text{card}L$, será llamada alcanzable desde m_0 si existe una sucesión de disparos de transiciones $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \dots t_{j_k} \in T^*$ tal que $\delta(m_0, \sigma) = m$. Luego, el conjunto de alcanzabilidad de la RP desde la marcación m_0 es dado por

$$A(R, m_0) = \{m \in \mathbb{N}^n / \exists \sigma \in T^*, \delta(m_0, \sigma) = m\}.$$

Ejemplo 2.1. Consideremos la RP marcada dada en la figura 1. En esta red $\varepsilon(m) = \{t_1.t_3.t_4\}$. Disparando t_4 obtenemos la nueva marcación $m' = (1, 0, 1, 3, 0)$. Ahora $\varepsilon(m') = \{t_1.t_3\}$: Disparando t_1 obtenemos la marcación $m'' = (0, 1, 2, 5, 0)$, en la cual $\varepsilon(m'') = \{t_2.t_3\}$. Este comportamiento particular de la RP dada es ilustrado en las figuras 1, 2, 3.

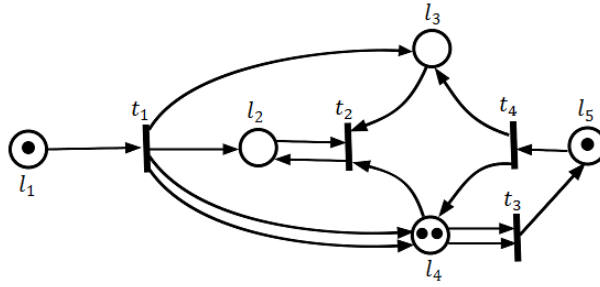


Figura 1: Una RP marcada con $m = (1, 0, 0, 2, 1)$ y $\varepsilon(m) = \{t_1, t_3, t_4\}$

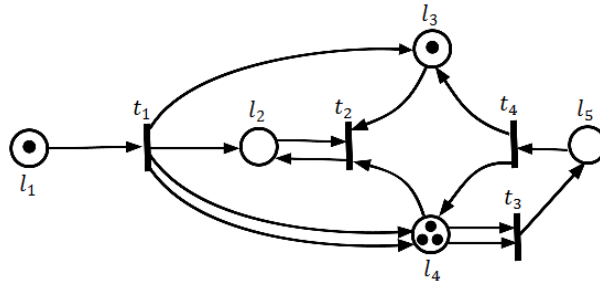


Figura 2: La marcación resultante del disparo de la transición t_4 en la figura 1.

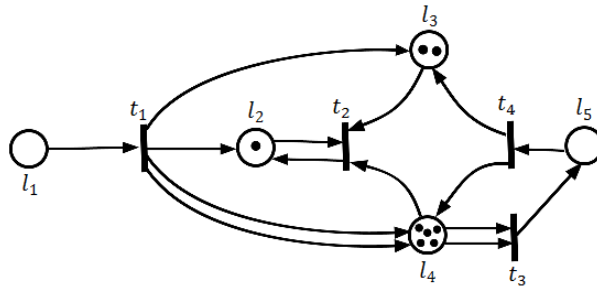


Figura 3: La marcación resultante del disparo de la transición t_1 en la figura 2

Como se puede apreciar desde el ejemplo 2.1, el cambio de marcación en una RP es producido por el disparo de transiciones y estas marcaciones pertenecen a $\mathbb{N}^n$, $n = \text{card}(L)$.

Ejemplo 2.2. Sea $M = (R, m_0)$ una RP marcada, con $L = \{1, 2, \dots, n\}$ y funciones de entrada (E) y salida (S) tomando valores en el conjunto potencia de L . Consideremos $\mathcal{L} = \{\sigma \in$

$T^*/\delta(m_0, \sigma)$ está definida}. Entonces,

$$\delta(m, t) = m - \sum_{i \in E(t)} e_i + \sum_{j \in S(t)} e_j,$$

donde e_i denota la n -upla unitaria con ceros en sus componentes excepto en la i -ésima componente. Para cada $\sigma \in \mathcal{L}$, sea $\mathcal{O}(\sigma) = (\mathcal{O}_{t_1}(\sigma), \mathcal{O}_{t_2}(\sigma), \dots, \mathcal{O}_{t_k}(\sigma))$, con $\mathcal{O}_{t_j}(\sigma)$, $j = 1, 2, \dots, k$, denotando el número de apariciones de t_j en σ , luego

$$\delta(m, \sigma) = m - \sum_{i \in T} \mathcal{O}_i(\sigma) \left(\sum_{i \in E(t)} e_i - \sum_{j \in S(t)} e_j \right)$$

para todo $m \in A(R, m_0)$ y todo $\sigma \in \mathcal{L}$.

En efecto, por inducción sobre la longitud de la sucesión de disparos de transiciones tenemos que para $k = 2 = |\sigma|$, $\sigma = t_{j_1} t_{j_2} \in \mathcal{L}$.

$$\begin{aligned} \delta(m, t_{j_1} t_{j_2}) &= \delta(\delta(m, t_{j_1}), t_{j_2}) \\ &= \delta(m, t_{j_1}) - \sum_{i \in E(t_{j_2})} e_i - \sum_{j \in S(t_{j_2})} e_j \\ &= m - \left(\sum_{i \in E(t_{j_1})} e_i - \sum_{j \in E(t_{j_1})} e_j \right) - \left(\sum_{i \in E(t_{j_2})} e_i - \sum_{j \in E(t_{j_2})} e_j \right) \\ &= m - \sum_{t \in T} \mathcal{O}_t(t_{j_1} t_{j_2}) \left(\sum_{i \in E(t)} e_i - \sum_{j \in S(t)} e_j \right) \end{aligned}$$

Supongamos que

$$\delta(m, \sigma) = m - \sum_{t \in T} \mathcal{O}_t(\sigma) \left(\sum_{i \in E(t)} e_i - \sum_{j \in S(t)} e_j \right),$$

para $k = |\sigma| > 2$, así para $t_h \in T$, $\sigma t_h \in \mathcal{L}$.

$$\begin{aligned} \delta(m, \sigma t_h) &= \delta(\delta(m, \sigma), t_h) = \delta(m, \sigma) - \sum_{i \in E(t_h)} e_i + \sum_{j \in S(t_h)} e_j \\ &= m - \sum_{t \in T} \mathcal{O}_t(\sigma) \left(\sum_{i \in E(t_h)} e_i - \sum_{j \in S(t_h)} e_j \right) - \left(\sum_{i \in E(t_h)} e_i - \sum_{j \in S(t_h)} e_j \right) \\ &= m - \sum_{t \in T} \mathcal{O}_t(\sigma t_h) \left(\sum_{i \in E(t)} e_i - \sum_{j \in S(t)} e_j \right). \end{aligned}$$

3 Estructuras de redes

Mostraremos algunas estructuras que garantizan la representación de diversas propiedades funcionalmente correctas en un sistema tales como disponibilidad de recursos, ausencia de conflictos y no bloqueo.

Particularmente, en términos de conflicto, si todo par de eventos diferentes no dependen simultáneamente de alguna condición común para sus ocurrencias ni conducen a una condición común luego de sus ocurrencias, entonces esto es apropiado para decir que todo par de eventos en el sistema son “independientes”.

Definición 3.1. Una RP $R = (L, T, E, S)$ es llamada de libre decisión si $E(t_i) \cap E(t_j) = \emptyset$ y $S(t_i) \cap S(t_j) = \emptyset$, para cualesquiera $t_i, t_j \in T, i \neq j$.

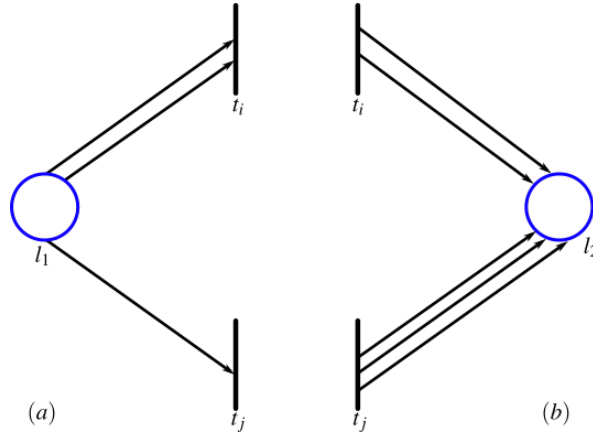


Figura 4: Dos fragmentos de redes representando de izquierda a derecha dos transiciones con un lugar de entrada común y con un lugar de salida común respectivamente.

Otra propiedad importante, relativa a la estructura de una RP , es la libre escogencia. Tal propiedad es incluida para representar la ocurrencia de diferentes eventos “dependientes” de la misma condición (ver figura 4(a)), la cual definimos como sigue.

Definición 3.2. Una RP $R = (L, T, E, S)$ es llamada de libre escogencia si para todo par $t_i, t_j \in T, t_i \neq t_j$, se tiene que $E(t_i) \cap E(t_j) = \{l\}$ para algún $l \in L$ o $E(t_i) \cap E(t_j) = \emptyset$.

Definición 3.3. Un lugar $l \in L$ en una RP marcada $M = (R, m_0)$ es llamada k -acotado si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m(l) \leq k$, para todo $m \in A(R, m_0)$. Si todos los lugares en la red son k -acotados, entonces la red es llamada k -acotada o simplemente acotada. En particular, si la red es 1-acotada diremos que la red es segura.

Definición 3.4. Una RP marcada $M = (R, m_0)$ es llamada persistente (libre de conflictos) si para todo $m \in A(R, m_0)$, y todo par $t_i, t_j \in T; t_i \neq t_j; t_i, t_j \in \mathcal{E}(m)$, se tiene que $t_i \in \mathcal{E}(\delta(m, t_j))$.

Definición 3.5. Una RP marcada $M = (R, m_0)$ es llamada viva (no bloqueada) si para toda marcación $m \in A(R, m_0)$ y toda transición $t_i \in T$, existe una marcación $m' \in A(R, m_0)$ alcanzable desde m tal que $t_i \in \mathcal{E}(m')$.

4 Resultados teóricos

En esta sección serán dados los argumentos para el análisis de RP que caracterizarán la clase de redes persistentes mediante la estructura propia de la red, y en consecuencia la ausencia de conflictos en el sistema.

Proposición 4.1. *Si $R = (L, T, E, S)$ es una RP de libre decisión, entonces $M = (R, m_0)$ es persistente.*

Demostración. Sea $m \in A(R, m_0)$, y sean $t, t' \in \mathcal{E}(m)$ con $t \neq t'$. Como R es de libre decisión, entonces $E(t) \cap E(t') = \emptyset$. Sea $\delta_i(m, t)$ la componente i -ésima de $\delta(m, t)$. Si $l_i \notin E(t)$, entonces

$$\begin{aligned}\delta_i(m, t) &= m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)| \\ &= m(l_i) + |l_i, S(t)| \geq m(l_i) \geq |l_i, E(t')|\end{aligned}$$

Finalmente, si $l_i \in E(t)$ entonces $l_i \notin E(t')$; de donde, $|l_i, E(t)| = 0$. En consecuencia, $\delta_i(m, t) \geq 0 = |l_i, E(t')| = 0$. Luego, $\delta_i(m, t) \geq |l_i, E(t')|$ para todo $l_i \in L$. Por lo tanto, $t' \in \mathcal{E}(\delta(m, t))$. Luego, M es persistente. $\square$

Teorema 4.1. *Si $M = (R, m_0)$ es una RP marcada persistente, entonces para toda marcación $m \in A(R, m_0)$ y todo par de transiciones t, t' , con $t, t' \in \mathcal{E}(m)$, $t \neq t'$ se tiene la propiedad siguiente:*

$$l_k \in E(t) \cap E(t'), l_k \notin S(t) \cap S(t') \Rightarrow m(l_k) > 1.$$

Demostración. Sea $m \in A(R, m_0)$, y sean $t, t' \in \mathcal{E}(m)$, con $t \neq t'$, entonces $m(l_i) \geq |l_i, E(t)|$ para todo $l_i \in L$. Sea $l_k \in E(t) \cap E(t')$, entonces en particular $m(l_k) \geq |l_k, E(t)| \geq 1$. Supongamos que $l_k \notin S(t) \cap S(t')$ y $m(l_k) = 1$, entonces por la persistencia de M , $\delta_k(m, t) > 0$, así $1 - |l_k, E(t)| + |l_k, S(t)| > 0$. Luego, $1 + |l_k, S(t)| > |l_k, E(t)|$. Ahora, si $l_k \notin S(t)$ entonces $|l_k, E(t)| < 1$; de donde $|l_k, E(t)| = 0$ lo cual es contradictorio.

Finalmente, si $l_k \in S(t)$ entonces $l_k \notin S(t')$. Luego, usando el razonamiento previo tenemos que $\delta_k(m, t') > 0$, con lo cual llegamos a la contradicción $|l_k, E(t')| = 0$. Por lo tanto, $m(l_k) > 1$. $\square$

Corolario 4.1. *Dada $M = (R, m_0)$ una RP marcada segura. M es persistente si, y solo si, R es de libre decisión.*

Demostración. Inmediato desde el teorema 4.1. $\square$

Teorema 4.2. *Dada $M = (R, m_0)$ una RP segura. Si M es persistente, entonces para cualesquiera $m \in A(R, m_0)$; $t, t' \in \mathcal{E}(m)$, $t \neq t'$, se tiene la propiedad siguiente:*

$$l \in E(t) \cap E(t') \Rightarrow l \in S(t) \cap S(t').$$

Demostración. Sea $l \in E(t) \cap E(t')$ y $l \notin S(t) \cap S(t')$, entonces $m(l) > 1$, lo cual contradice la seguridad de M . $\square$

Corolario 4.2. *Dada $M = (R, m_0)$ una RP segura, con $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$. Entonces, M es persistente si, y solo si, $E(t) \cap E(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$.*

Demostración. Desde el teorema 4.2 se sigue que si $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$, entonces $E(t) \cap E(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$; en consecuencia, se obtiene el resultado. $\square$

Teorema 4.3. *Dada $M = (R, m_0)$ una RP marcada donde E y S tienen rango en el conjunto potencia de L . Supongamos que para toda marcación $m \in A(R, m_0)$, todo par $t, t' \in \mathcal{E}(m)$, $t \neq t'$, y todo lugar $l_k \in E(t) \cap E(t')$ se tiene que $m(l_k) > 1$, entonces M es persistente.*

Demostración. Sea $m \in A(R, m_0)$, y sean $t, t' \in \mathcal{E}(m)$, con $t \neq t'$. Si $l_i \in E(t) \cap E(t')$, entonces por hipótesis $m(l_i) > 1$; de donde

$$\begin{aligned}\delta_i(m, t) &= m(l_i) - |l_i, E(t)| + |l_i, S(t)| \\ &\geq m(l_i) - 1 \geq 1 = |l_i, E(t')|.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $l_i \notin E(t) \cap E(t')$ entonces consideramos los casos siguientes: $l_i \in E(t)$ y $l_i \notin E(t')$. Así, $l_i \in E(t) \Rightarrow l_i \notin E(t') \Rightarrow \delta_i(m, t) \geq 0 = |l_i, E(t')|$. Finalmente, $l_i \notin E(t) \Rightarrow \delta_i(m, t) = m(l_i) + |l_i, S(t)| \geq m(l_i) \geq |l_i, E(t')|$.

El caso $l_i \notin E(t)$ y $l_i \notin E(t')$ es trivial. Luego, $\delta_i(m, t) \geq |l_i, E(t')|$ para todo $l_i \in L$. Por lo tanto, $t' \in \mathcal{E}(\delta(m, t))$. Luego, M es persistente. $\square$

Teorema 4.4. *Dada $M = (R, m_0)$ una RP marcada viva, donde R es de libre escogencia. Supongamos que las funciones de entrada y salida tienen rango en el conjunto potencia de L . Entonces, la persistencia de M implica que para cualesquiera $t, t' \in T, t \neq t'$, se tiene la propiedad siguiente:*

$$l \in E(t) \cap E(t') \Rightarrow l \in S(t) \cap S(t').$$

Demostración. Supongamos que existen transiciones $t, t' \in T, t \neq t'$, y $l \in L$ tales que $l \in E(t) \cap E(t')$ y $l \notin S(t) \cap S(t')$. Como R es de libre escogencia, entonces $E(t) = E(t') = \{l\}$. La vivencia de M asegura que existe $m \in A(R, m_0)$ tal que $t' \in \mathcal{E}(m)$; luego, $m(l) > 0$ y en consecuencia $t \in \mathcal{E}(m)$.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $l \in S(t')$ y sea $m' = \delta(m, \phi)$, donde $\phi = tt \dots t$, $(m(l) - 1)$ -veces, entonces claramente $m' \in A(R, m_0)$; $t, t' \in \mathcal{E}(m')$ pero $t' \notin \mathcal{E}(\delta(m', t))$. Por lo tanto M no es persistente. $\square$

Corolario 4.3. *Dada $M = (R, m_0)$ una RP marcada viva, con R de libre escogencia tal que $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$. Entonces, M es persistente si, y solo si, $E(t) \cap E(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$.*

Demostración. Si $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$, entonces desde el teorema 4.3 $E(t) \cap E(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$; de donde se sigue lo requerido. $\square$

Corolario 4.4. *Dada $M = (R, m_0)$ una RP marcada viva, con R de libre escogencia tal que $S(t) \cap S(t') = \emptyset, \forall t \neq t'$. Entonces, M es persistente si, y solo si, R es de libre decisión.*

Demostración. Inmediato desde el teorema 4.4. $\square$

5 Conclusión

El modelo RP verificando los argumentos teóricos establecidos en la sección 4 proporcionan una estructura para estudiar un amplio rango de $SDED$, donde la red es conocida. La persistencia de una RP excluye la existencia de cualquier conflicto. Por lo tanto, en la asignación de recursos compartidos, un modelo de red persistente implica que no hay conflicto entre procesos. La no persistencia de una red puede implicar cierto grado de injusticia en la asignación de recursos en un contexto de sistemas distribuidos, en especial, en un medio ambiente de manufactura.

Referencias

- [1] Aldaniyazov, K.N, (2018), *Main Factors for the Improvement of a Complex System of Strategic Production Cost Management*, Revista Espacios, **39**(11), pp. 29.
- [2] Andrade, Herlandi de Souza and Loreiro, Geilson, (2018), *Proposta de um modelo de Planejamento estratégico baseado em engenharia de sistemas*, Revista Espacios, **39**(13), pp. 10.
- [3] Castellano C., (2006), *Consideraciones para el modelado de sistemas mediante Redes de Petri*, Revista Ciencia e Ingeniería, UPM, Madrid, ISSN 1316-7081, **27**(2), 49–58.
- [4] Eilemberg S., (1974), Automata, languages and machines, Academic Press, New York, Vol. A.
- [5] Mata, G., Lugo, A., and Rojas, G.,(2016), Aplicación de bases de Grobner en el problema de alcanzabilidad de estados de sistemas de eventos discretos modelados por redes de Petri, *Lecturas Matemáticas*, **37**(1), 5–23.
- [6] Mata, G., Ruiz, B., Camacho, C., Méndez, A., Muñoz, S. and Zambrano, H.,(2018), Planning algorithm in a class of discrete event systems, *DYNA*, **85**(206), 283–293.
- [7] Murata T., (1989), Petri Nets: properties, analysis and applications, *Proceedings of the IEEE*, **77**(4).
- [8] Peterson J., (1981), *Petri net theory and the modeling of systems*, Prentice Hall, PTR Upper Saddle River, NJ, USA.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 10–22
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7487423>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Estructura algebraica de los autómatas finitos y lenguajes

Algebraic structure of finite automata and languages

Fernando Ortiz (fernandojavier12037@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1048-3478>

Instituto de Postgrado
Universidad Técnica de Manabí.
Av. Urbina y Che Guevara, 130103, Ecuador.

Luz Solé (luzsole@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6783-1819>

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias
Universidad de los Andes
Mérida 5101, República Bolivariana de Venezuela

Resumen

Estableceremos a los autómatas finitos mediante un enfoque algebraico, donde todos los argumentos y pruebas son constructivas; y donde el concepto fundamental para dicho enfoque esta centrado en la multiplicidad.

Palabras y frases clave: Autómatas finitos, comportamiento dinámico, multiplicidad.

Abstract

We will present finite automata through an algebraic approach, where all the arguments and proofs are constructive; and where the fundamental concept for this approach is centered on multiplicity.

Key words and phrases: Finite automata, dynamic behavior, multiplicity.

1 Introducción

Presentamos una estructura algebraica la cual será aplicada a los autómatas finitos [1, 4, 5, 2, 3], donde la noción básica que nos permitirá tal extensión es la multiplicidad. Para ser más precisos, sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ un autómata, y sea $|\mathcal{A}|$ su correspondiente comportamiento dinámico, cada camino $c : i \rightarrow t$, $i \in I, t \in T$ con etiqueta $|c| = s$ determina que $s \in \mathcal{A}$; más aún, si n es el número de tales caminos, entonces podemos establecer una función $\Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$ la cual especifica la multiplicidad de los elementos $s \in \Sigma^*$. En este caso diremos que $s \in |\mathcal{A}|$ con multiplicidad n . También, con abuso de lenguaje escribiremos la función de multiplicidad como $|\mathcal{A}| : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$,

Recibido 29/06/2021. Revisado 17/09/2021. Aceptado 23/11/2021.
MSC (2010): Primary 37N35; Secondary 93C65.
Autor de correspondencia: Luz Solé

$|\mathcal{A}|(s) = n$, y la llamaremos el comportamiento de $\mathcal{A}$. Note que de acuerdo a lo establecido, $|\mathcal{A}|(s) = 0$ significa que $s \notin |\mathcal{A}|$. Así, identificamos a $|\mathcal{A}|$, el cual es un subconjunto ordinario de Σ^* , con la aplicación $|\mathcal{A}| : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$. Por otro lado, sin consideraciones de multiplicidad cualquier subconjunto A de Σ^* puede ser visto como una función $A : \Sigma^* \rightarrow \beta$, donde $\beta = \{0, 1\}$. La identificación es dada por la relación: $s \in A \iff A(s) = 1$. Finalmente, nos confrontamos con dos clases de “Subconjuntos” de Σ^* ($\mathbb{N}$ -subconjuntos y β -subconjuntos) las cuales corresponden, unificadamente, al concepto de un semianillo K .

2 Nociones preliminares

Nosotros asumiremos que son conocidos los conceptos y resultados básicos de las teorías de autómatas y lenguajes. Por su parte,

Definición 2.1. Un semianillo K es un conjunto dotado de dos operaciones: suma(+) y multiplicación $\cdot$; tal que $(K, +)$ es un monoide conmutativo con elemento neutro 0 y $(K, \cdot)$ es un monoide con elemento identidad 1. Además, para todo $x, y, z \in K$ se tiene que

$$\begin{aligned} x(y + z) &= xy + xz & (y + z)x &= yx + zx \\ x0 &= 0 = 0x. \end{aligned}$$

Un semianillo K es llamado conmutativo si $(K, \cdot)$ es conmutativo. Claramente, todo anillo con unidad es un semianillo. Ejemplos de algunos semianillos conmutativos.

Ejemplo 2.1. Sea $\beta = \{0, 1\}$ es un semianillo, donde la suma esta dada por

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 1 & 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 & 1 + 0 &= 1. \end{aligned}$$

Note que 0 es el elemento neutro. La multiplicación está dada por

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 & 0 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 & 1 \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

donde 1 es el elemento identidad.

Ejemplo 2.2. El conjunto $\mathbb{N}$ es el semianillo de todos los enteros $n \geq 0$, con la suma y la multiplicación usual.

Ejemplo 2.3. El conjunto $\overline{\mathbb{N}}$ es el semianillo $\mathbb{N}$ junto con un elemento adicional ∞ , donde la suma y la multiplicación son extendidas por

$$\begin{aligned} n + \infty &= \infty & \infty + n &= \infty & \infty + \infty &= \infty \\ n \cdot \infty &= \infty, n \neq 0 & \infty \cdot n &= \infty; n \neq 0 & \infty \cdot \infty &= \infty \\ \infty \cdot 0 &= 0 = 0 \cdot \infty. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. El conjunto $\mathbb{R}^+$ es el semianillo de todos los números reales $x \geq 0$, con la suma y la multiplicación usual.

Ejemplo 2.5. El conjunto $\overline{\mathbb{R}}^+$ es el semianillo de los números $\mathbb{R}^+$ junto con ∞ , donde las operaciones se extienden exactamente como en el caso de $\mathbb{N}$ a $\overline{\mathbb{N}}$.

Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ una familia arbitraria de elementos de un semianillo K , donde I es un conjunto cualquiera de índices; es decir, una aplicación $\varphi : I \longrightarrow K$, tal que $\varphi(i) = x_i$, $i \in I$. Si I es finito, la suma

$$\sum_{i \in I} x_i \in K \quad (2.1)$$

Esta suma tiene las siguientes propiedades:

$$\text{Si } I = \{i\}, \text{ entonces } \sum_{i \in I} x_i = x_i \quad (2.2)$$

Si $I = \bigcup_{j \in J} I_j$ es una partición de I y $z \in K$, entonces

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} x_i \right) \quad (2.3)$$

$$z \left(\sum_{i \in I} x_i \right) = \sum_{i \in I} zx_i \quad (2.4)$$

$$\left(\sum_{i \in I} x_i \right) z = \sum_{i \in I} x_i z \quad (2.5)$$

$$\text{Si } I = \emptyset, \text{ entonces } \sum_{i \in I} x_i = 0 \quad (2.6)$$

Ahora, considerando a (2.1) en lugar de la suma $x+y$ y tomando (2.2)-(2.6) y $(K, \cdot)$ el monoide dado como axiomas, entonces podemos definir

$$x_1 + x_2 = \sum_{i \in I} x_i, \text{ con } I = \{1, 2\} \quad \text{y} \quad 0 = \sum_{i \in I} x_i, \text{ si } I = \emptyset.$$

En consecuencia, bajo esta axiomática, tenemos una forma equivalente para definir un semianillo. En efecto, la conmutatividad y asociatividad se obtienen del hecho siguiente: si $\varphi : J \rightarrow I$ es una biyección, entonces

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{j \in J} x_{\varphi(j)}.$$

Por otro lado, la distributividad a izquierda y derecha se obtienen de (2.4) y (2.5). Enfatizamos que (2.1) es definida si I es finito. Ahora, si para cualquier conjunto de índices I , (2.1) está bien definida como elemento de K , entonces bajo nuestra nueva definición de semianillo, se obtiene la noción de semianillo completo. Finalmente, todo semianillo completo es un semianillo.

Los anillos $\overline{\mathbb{N}}, \overline{\mathbb{R}}^+, \beta$ son completos ya que la suma puede extenderse de manera natural para definir (2.1), para cualquier conjunto de índices I , esto es, usando el orden usual en $\overline{\mathbb{N}}, \overline{\mathbb{R}}^+, \beta$ puede definirse (2.1) como la menor de las cotas superiores de los elementos $\sum_{i \in J} x_i$, donde J recorre todos los subconjuntos finitos de I .

Definición 2.2. Dados dos semianillos K y K' , un homomorfismo $\varphi : K \longrightarrow K'$ es una función que satisface:

$$\begin{aligned}\varphi(x_1 + x_2) &= \varphi(x_1) + \varphi(x_2), \\ \varphi(0) &= 0'\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x_1 \cdot x_2) &= \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2), \\ \varphi(1) &= 1' .\end{aligned}\tag{2.8}$$

Notemos que si I es finito, entonces

$$\varphi\left(\sum_{i \in I} x_i\right) = \sum_{i \in I} \varphi(x_i)\tag{2.9}$$

Observación 2.1. Si K y K' son completos entonces (2.7) es reemplazado por (2.9) para I arbitrario.

Definición 2.3. Un semianillo K será llamado positivo si satisface:

1. $0 \neq 1$.
2. si $x + y = 0$, entonces $x = y = 0$.
3. si $xy = 0$, entonces $x = 0$ ó $y = 0$.

Sea K un semianillo y considérese $T : K \rightarrow \beta$ dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = 0 \\ 0, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Entonces, T es un homomorfismo si, y sólo si, K es positivo.

En lo que sigue asumiremos que K es un semianillo no trivial ($0 \neq 1$) y conmutativo.

Definición 2.4. Sea X un conjunto. Un subconjunto A de X es una función $A : X \longrightarrow K$. Para cada $x \in X$, el elemento $A(x)$ será llamado la multiplicidad con la cual x pertenece a A . Si los valores que toma A son 0 y 1, diremos que el subconjunto A de X es no ambiguo.

Si $K = \beta$, entonces todos los subconjuntos de X son no ambiguos. Los subconjuntos A de X no ambiguos pueden ser identificados con el subconjunto $\{x : A(x) = 1\}$ de X (recordemos que hemos supuesto $0 \neq 1$).

Ejemplo 2.6. Sea $X, \emptyset$ y x , para cada $x \in X$, dados por:

1. $X(x) = 1$, para todo $x \in X$; $\emptyset(x) = 0$, para todo $x \in X$;

$$2. x(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = y \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

son subconjuntos no ambiguos. Los subconjuntos no ambiguos x serán llamados “simples”. Si A es un subconjunto no ambiguo de X , las notaciones $x \in A$ y $A(x) = 1$ son sinónimos.

Finalmente, si A es un subconjunto de X y $\varphi : K \rightarrow K'$ es un homomorfismo de semianillos, entonces la composición

$$X \xrightarrow{A} K \xrightarrow{\varphi} K'$$

es un subconjunto $\varphi(A)$ de X .

La primera operación que consideraremos es la suma o unión, denotada por $\sum$ ó $\cup$ respectivamente. Para cada familia indizada $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X , definimos

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)(x) = \left(\sum_{i \in I} A_i\right)(x) = \sum_{i \in I} A_i(x) \quad (2.10)$$

Esta definición no requiere comentario si K es completo. En otro caso, se asumirá que la familia $\{A_i\}_{i \in I}$ es localmente finita; es decir, para cada $x \in X$ se tiene que $A_i(x) = 0$ excepto para un número finito de elementos $i \in I$.

Si $I = \{1, \dots, n\}$, se usará la notación

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \text{ ó } A_1 + A_2 + \dots + A_n$$

en lugar de $\bigcup_{i \in I} A_i$ ó $\sum_{i \in I} A_i$, respectivamente.

La segunda operación es la multiplicación de $k \in K$ por un subconjunto A . El resultado es un subconjunto kA definido por

$$(kA)(x) = kA(x) \quad (2.11)$$

A partir de las definiciones previas, se tienen las siguientes propiedades:

$$1A = A, \quad 0A = \emptyset, \quad (k_1 k_2)A = k_1(k_2 A), \quad \left(\sum_{i \in I} k_i\right)A = \sum_{i \in I} k_i A, \quad k\left(\sum_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} kA_i.$$

La intersección $A \cap B$ de dos subconjuntos es definida por:

$$(A \cap B)(x) = A(x)B(x).$$

También, definimos la intersección cuando B es un subconjunto y A es un subconjunto no ambiguo con respecto a β . En este caso se tiene que:

$$(A \cap B)(x) = \begin{cases} B(x), & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Ahora, para cada subconjunto A de X se tiene que:

$$A = \sum_{x \in X} A(x)x.$$

Esta suma está bien definida. En efecto. La familia $\{A(x)x\}_{x \in X}$ es localmente finita:

$$(A(x)x)(y) = \begin{cases} A(x), & \text{si } x = y \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A $\sum_{x \in X} A(x)x$ es llamada la expansión de A (en términos de simples). Esta es una forma útil de manipular los subconjuntos. En efecto,

Ejemplo 2.7.

$$kA = \sum_{x \in X} kA(x)x \quad A \cap B = \sum_{x \in X} A(x)B(x)x$$

Sea A un subconjunto de X y sea X' un subconjunto no ambiguo con respecto a β de X . Si $A(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus X'$, entonces A es un subconjunto de X' . En este caso, escribimos $A \subset X'$. Finalmente, obtenemos que:

$$A \subset X' \Leftrightarrow A \cap X' = A.$$

Nuestro interés ahora es estudiar el producto entre dos subconjuntos de S , donde $(S, \cdot)$ es un semigrupo.

Definición 2.5. Sean $(S, \cdot)$ un semigrupo y A, B subconjuntos de S , con K completo. El subconjunto AB de S es dado por:

$$(AB)(z) = \sum_{xy=z} A(x)B(y) \quad (2.12)$$

Observación 2.2. 1. La fórmula para el producto AB , dada en la ecuación (2.12), es incluida para garantizar la bilinealidad del producto.

2. Sea $z \in S$, pueden existir infinitos pares (x, y) tales que $xy = z$. Por esta razón es necesario que K sea completo. Sin embargo, si $S = \Sigma^+$ es el semigrupo libre con base Σ (no necesariamente finito), entonces el número de factorizaciones $xy = z$ es exactamente $|z| - 1$. En consecuencia, la suma en (2.12) es finita y K por lo tanto no tiene porque ser completo. El mismo argumento se aplica si $S = \Sigma^*$.

Así, AB es bilineal. En efecto. Sean $\{A_i\}_{i \in I}$ y $\{B_j\}_{j \in J}$ familias de subconjuntos de S , entonces

$$\left(\sum_{i \in I} A_i \right) B = \sum_{i \in I} A_i B \quad A \left(\sum_{j \in J} B_j \right) = \sum_{j \in J} AB_j$$

$$(kA)B = k(AB) = A(kB).$$

Además, AB es asociativa. Finalmente, si M es un monoide, entonces K^M es un semianillo (no necesariamente conmutativo) con identidad el elemento simple θ , donde θ es la identidad de M . Sean P y Q conjuntos finitos. Un subconjunto de $P \times Q$ es una matriz donde las filas y las columnas son indizadas con elementos de P y Q respectivamente, con entradas en K . Si $A \in K^{P \times Q}$, en lugar de escribir $A(p, q)$, escribiremos A_{pq} y la matriz la identificaremos como $A = [A_{pq}]$. La suma de matrices es definida usando la suma de subconjuntos. Esto es, si $B \in K^{P \times Q}$, entonces

$$(A + B)_{pq} = A_{pq} + B_{pq}$$

Una nueva operación es la multiplicación de matrices. Sean $A \in K^{P \times Q}$ y $B \in K^{Q \times R}$, el producto $AB \in K^{P \times R}$ está definido por:

$$(A \cdot B)_{pr} = \sum_{q \in Q} A_{pq} B_{qr}.$$

Las propiedades usuales de la multiplicación son fácilmente establecidas. Si $P = Q$, entonces $K^{P \times P}$ es un semianillo con unidad 1_P , donde

$$(1_P)_{qq'} = \begin{cases} 1, & \text{si } q = q' \\ 0, & \text{si } q \neq q' \end{cases}$$

Si $A \in K^{P \times Q}$ y P es unitario, entonces A es llamado vector fila. Si Q es unitario, entonces A es llamado vector columna.

3 Autómatas finitos sobre un semianillo conmutativo

Definición 3.1. Sean Σ un alfabeto finito y K un semianillo conmutativo. Un K -autómata $\mathcal{A}$ es un quintuple

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T),$$

donde Q es un conjunto finito, I y T son subconjuntos de Q , y E es un subconjunto de $Q \times \Sigma \times Q$.

Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ un K -autómata. Si $E(p, \alpha, q) = k \neq 0$, entonces diremos que existe un arco de p a q que denotaremos $p \xrightarrow{k\alpha} q$ con etiqueta $k\alpha$. En este caso, también diremos que $p \xrightarrow{k\alpha} q$ está en $\mathcal{A}$.

Como en el caso de los autómatas, se consideran los caminos o trayectorias $c : p \rightarrow q$. Así, si c es un camino

$$p \xrightarrow{k_1\alpha_1} q_1 \xrightarrow{k_2\alpha_2} \cdots q_{n-1} \xrightarrow{k_n\alpha_n} q,$$

entonces su etiqueta es $|c| = ks$, con $K = k_1 \cdots k_n$ y $s = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, y su longitud es $\|c\| = n = |s|$.

Definición 3.2. Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ un K -autómata. El comportamiento de $\mathcal{A}$ es el subconjunto de Σ^* , denotado $|\mathcal{A}|$, dado por:

$$|\mathcal{A}| = \sum_{p,q \in Q} \sum_c I(p)|c|T(q). \quad (3.1)$$

con c recorriendo todos los caminos $c : p \rightarrow q$; es decir,

$$|\mathcal{A}|(s) = \sum_{p,q \in Q} \sum_{k \in C} I(p)kT(q),$$

donde $C = \{k \in K : \exists c : p \rightarrow q, |c| = ks\}$.

Observación 3.1. 1. Para cada $s \in \Sigma^*$, existe solo un número finito de caminos con etiquetas ks , $k \in K$. Luego, la suma (3.1) es localmente finita y en consecuencia $|\mathcal{A}|$ está bien definido sin asumir que K sea completo.

2. Los únicos caminos con longitud 0 son los triviales, es decir, los caminos

$$c : p \longrightarrow p, \text{ con etiqueta } |c| = 1\theta.$$

En consecuencia,

$$|\mathcal{A}|(\theta) = \left(\sum_{p,q \in Q} \sum_c I(p)|c|T(q) \right) (\theta) = \sum_{p \in Q} I(p)T(p) = IT$$

donde IT es producto del vector fila $I = (I(p_1), \dots, I(p_n))$ por el vector columna $\begin{pmatrix} T(p_1) \\ \vdots \\ T(p_n) \end{pmatrix}$.

El subconjunto E de $Q \times \Sigma \times Q$ es una función

$$E : Q \times \Sigma \times Q \rightarrow K.$$

Denotaremos $E(p, \alpha, q) = E_{pq}(\alpha)$. Así, para todo $p, q \in Q$, E_{pq} es un subconjunto de Σ . De esta manera, E puede ser vista como una matriz

$$E : Q \times Q \rightarrow K^\Sigma,$$

llamada matriz de transición. Cada subconjunto de Σ puede extenderse a un subconjunto de Σ^* poniendo, para $p, q \in Q$,

$$E_{pq} : \Sigma^* \longrightarrow K,$$

$$E_{pq}(s) = \begin{cases} E_{pq}(s), & \text{si } s \in \Sigma \\ 0, & \text{si } s \notin \Sigma \end{cases}.$$

De manera que, E puede ser vista como un subconjunto de $Q \times Q$; es decir, como una matriz $Q \times Q$ con entradas en K^{Σ^*} . Por lo tanto, como K^{Σ^*} es un semianillo, podemos utilizar las operaciones correspondientes. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos las matrices

$$E^n : Q \times Q \longrightarrow K^{\Sigma^*},$$

$$E^0 = 1_Q, E^1 = E, \dots, E^n = EE^{n-1}, n \geq 2, \text{ donde}$$

$$E_{pq}^n = \sum_{r \in Q} E_{pr} E_{rq}^{n-1}, \text{ con } p, q \in Q.$$

Claramente, si $s \in \Sigma^*$ y $|s| \neq n$, entonces $E_{pq}^n(s) = 0$, con $p, q \in Q$. Luego, $\{E_{pq}^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es localmente finita. Así, podemos definir

$$E_{pq}^* = \sum_{n=0}^{\infty} E_{pq}^n$$

y en consecuencia, obtenemos la matriz

$$E^* : Q \times Q \longrightarrow K^{\Sigma^*}$$

$$E^* = 1_Q + E + E^2 + \dots + E^n + \dots$$

llamada matriz de transición extendida. Para cada $s \in \Sigma^*$, consideremos la matriz

$$E^*(s) = [E_{pq}^*(s)] \in K^{Q \times Q}.$$

Si $s = \alpha_1 \cdots \alpha_n$, entonces

$$E^*(s) = E^n(s) = E(\alpha_1) \cdots E(\alpha_n) = E^*(\alpha_1) \cdots E^*(\alpha_n).$$

4 Resultados teóricos

Teorema 4.1. *Para cualesquiera $p, q \in Q$, el subconjunto E_{pq}^* es la suma de todas las etiquetas de caminos $c : p \rightarrow q$ en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sean $p, q \in Q$, como $E_{pq}^* = \sum_{n=0}^{\infty} E_{pq}^n$ es suficiente comprobar que E_{pq}^n es la suma de todas las etiquetas de los caminos de longitud n .

Si $n = 0$, entonces

$$E_{pq}^0 = \begin{cases} \theta, & \text{si } p = q \\ \phi, & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

donde θ es la identidad de K^{Σ^*} .

Si $n = 1$, entonces

$$E_{pq}^1 = \sum_{r \in Q} E_{pr}(1_Q)_{rp} = \sum_{r \in Q} E_{pr}E_{rq}^0.$$

Supongamos que el resultado es cierto para $n - 1$, $n \geq 2$; es decir,

$$E_{pq}^{n-1} = \sum_{r_1, \dots, r_{n-1} \in Q} E_{pr_1}E_{r_1r_2} \cdots E_{r_{n-1}q} = \sum_{r \in Q} E_{pr}E_{rq}^{n-2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E_{pq}^n &= \sum_{r \in Q} E_{pr}E_{rq}^{n-1} = \sum_{r_1 \in Q} E_{pr_1} \left(\sum_{r_2, \dots, r_n \in Q} E_{r_1r_2}E_{r_2r_3} \cdots E_{r_nq} \right) \\ &= \sum_{r_1, \dots, r_n \in Q} E_{pr_1}E_{r_1r_2} \cdots E_{r_nq} = \sum_{r \in Q} E_{pr}E_{rq}^{n-2}. \end{aligned}$$

Así, E_{pq}^n es la suma de todas las etiquetas de los caminos con longitud n . Luego, E_{pq}^* es la suma de todas las etiquetas de los caminos $c : p \rightarrow q$ en $\mathcal{A}$. $\square$

Corolario 4.1. *El comportamiento de $\mathcal{A}$ es $|\mathcal{A}| = IE^*T$, con I visto como un vector fila y T como un vector columna.*

Demostración.

$$|\mathcal{A}| = \sum_{p, q \in Q} \sum_c I(p)|c|T(q) = \sum_{p, q \in Q} l(p)E_{pq}^*T(q) = IE^*T.$$

$\square$

Definición 4.1. Sean K un semianillo conmutativo y Σ un alfabeto finito. Un subconjunto A de Σ^* es llamado regular si existe un K -autómata $\mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{A}| = A$.

Cuando consideremos dos K -autómatas $\mathcal{A} = (Q_A, \Sigma, E_A, I_A, T_A)$ y $\mathcal{B} = (Q_B, \Sigma, E_B, I_B, T_B)$, asumiremos que $Q_A \cap Q_B = \emptyset$.

Definición 4.2. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, dos K -autómatas, el K -autómata unión de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es dado por

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = (Q_{A \cup B}, \Sigma, E_{A \cup B}, I_{A \cup B}, T_{A \cup B})$$

donde, $Q_{A \cup B} = Q_A \cup Q_B$,

$$I_{A \cup B}(p) = \begin{cases} I_A(p), & \text{si } p \in Q_A \\ I_B(p), & \text{si } p \in Q_B \end{cases} \quad T_{A \cup B}(p) = \begin{cases} T_A(p), & \text{si } p \in Q_A \\ T_B(p), & \text{si } p \in Q_B \end{cases}$$

$$E_{A \cup B}(p, \alpha, q) = \begin{cases} E_A(p, \alpha, q), & \text{si } p, q \in Q_A \\ E_B(p, \alpha, q), & \text{si } p, q \in Q_B \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación 4.1. Un camino en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un camino en $\mathcal{A}$ o es un camino en $\mathcal{B}$.

Proposición 4.1. La unión de dos subconjuntos regulares de Σ^* es un subconjunto regular de Σ^* .

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos regulares de Σ^* , y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos K -autómatas tales que $|\mathcal{A}| = A$ y $|\mathcal{B}| = B$. Consideremos el K -autómata $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, entonces, para todo $s \in \Sigma^*$,

$$|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|(s) = \left(\sum_{p, q \in Q_{A \cup B}} \sum_c I_{A \cup B}(p) |c| T_{A \cup B}(q) \right) (s) = \sum_{p, q \in Q_A \cup Q_B} \sum_k I_{A \cup B}(p) k T_{A \cup B}(q),$$

donde $k \in K$ es tal que existe un camino $c : p \rightarrow q$ en $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ con $|c| = ks$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} \cup \mathcal{B}|(s) &= \sum_{p, q \in Q_A} \sum_k I_A(p) k T_A(q) + \sum_{p, q \in Q_B} \sum_k I_B(p) k T_B(q) \\ &= |\mathcal{A}|(s) + |\mathcal{B}|(s) = A(s) + B(s) = (A \cup B)(s). \end{aligned}$$

Así, $|\mathcal{A} \cup \mathcal{B}| = A \cup B$. □

Definición 4.3. Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos K -autómatas. El K -autómata producto (o intersección) de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es dado por $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (Q_{A \times B}, \Sigma, E_{A \times B}, I_{A \times B}, T_{A \times B})$, donde

$$\begin{aligned} Q_{A \times B} &= Q_A \times Q_B, & I_{A \times B}(p, q) &= I_A(p) I_B(q), \\ T_{A \times B}(p, q) &= T_A(p) T_B(q), & E_{A \times B}((p, q), \alpha, (p', q')) &= E_A(p, \alpha, p') E_B(q, \alpha, q'). \end{aligned}$$

Observación 4.2. Un camino $c : (p, q) \rightarrow (p', q')$ en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, con etiqueta $|c| = ks$, puede ser visto como un par $c = (c', c'')$, donde $c' : p \rightarrow p'$ es un camino en $\mathcal{A}$, con $|c'| = k_1 s$ y $c'' : q \rightarrow q'$ es un camino en $\mathcal{B}$, con $|c''| = k_2 s$, con $k_1 k_2 = k$.

Proposición 4.2. La intersección de dos subconjuntos regulares de Σ^* es un subconjunto regular de Σ^* .

Demostración. Sean A y B dos subconjuntos regulares de Σ^* y $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ dos K -autómatas tales que $|\mathcal{A}| = A$ y $|\mathcal{B}| = B$. Consideremos el K -autómata $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$. Entonces, para todo $s \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A} \times \mathcal{B}|(s) &= \left(\sum_{(p,q), (p',q') \in Q_A \times Q_B} \sum_c I_{A \times B}(p, q) |c| T_{A \times B}(p', q') \right) (s) \\ &= \left(\sum_{p, p' \in Q_A; q, q' \in Q_B} \sum_{(c', c'')} I_A(p) I_B(q) |(c', c'')| T_A(p') T_B(q') \right) (s) \end{aligned}$$

donde $c' : p \rightarrow p'$ es un camino en $\mathcal{A}$ y $c'' : q \rightarrow q'$ es un camino en $\mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} &= \sum_{p, p' \in Q_A; q, q' \in Q_B} \sum_{k_1, k_2} I_A(p) k_1 T_A(p') I_B(q) k_2 T_B(q') \\ &= \sum_{p, p' \in Q_A; q, q' \in Q_B} \sum_{k_1, k_2} I_A(p) k_1 T_A(p') I_B(q) k_2 T_B(q') \end{aligned}$$

donde $|c'| = k_1 s$, $|c''| = k_2 s$ y $k_1 k_2 = k$ con $ks = |c|$,

$$\begin{aligned} &= \sum_{p, p' \in Q_A} \sum_{k_1} I_A(p) k_1 T_A(p') \sum_{q, q' \in Q_B} \sum_{k_2} I_B(q) k_2 T_B(q') \\ &= \left(\sum_{p, p' \in Q_A} \sum_{c'} I_A(p) |c'| T_A(p') \right) (s) \left(\sum_{q, q' \in Q_B} \sum_{c''} I_B(q) |c''| T_B(q') \right) (s) \\ &= |\mathcal{A}|(s) |\mathcal{B}|(s) = (|\mathcal{A}| \cap |\mathcal{B}|)(s) = (A \cap B)(s) \end{aligned}$$

□

Definición 4.4. Un K -autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ es llamado normalizado si $I = \{i\}$ y $T = \{t\}$ (o simplemente $I = i$ y $T = t$) son dos subconjuntos simples distintos, y no existen arcos $q \xrightarrow{k\alpha} i$, $t \xrightarrow{k\alpha} q$, con $k \neq 0$, es decir, $E(q, \alpha, i) = E(t, \alpha, q) = 0$ para todo $q \in Q$ y $\alpha \in \Sigma$.

Proposición 4.3. Para cada K -autómata $\mathcal{A}$ existe un K -autómata normalizado $\mathcal{A}'$ tal que $|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}| \cap \Sigma^*$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ un K -autómata y consideremos $Q' = Q \cup i \cup t$, donde i y t son dos nuevos estados distintos. Definimos la nueva matriz E' como sigue:

$$E'_{pq} = E_{pq}, \quad E'_{iq} = \sum_{p \in Q} l_p E_{pq}, \quad E'_{pt} = \sum_{q \in Q} E_{pq} T_q, \quad E'_{it} = \sum_{p, q \in Q} l_p E_{pq} T_q, \quad E'_{pi} = E_{ti} = E_{tq} = \emptyset,$$

donde $l_p = I(p)$ y $T(q) = T_q$. Un cálculo simple determina que $E'^*_{it} = IE^+T$, donde $E^+ = E + E^2 + \dots + E^n + \dots = EE^*$. El K -autómata $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, E', i, t)$ es normalizado, y usando el corolario 4.1 se tiene

$$|\mathcal{A}'| = E'^*_{it} = IE^+T = IE^*T \cap \Sigma^+ = |\mathcal{A}| \cap \Sigma^+$$

□

Proposición 4.4. *Sea A un subconjunto regular de Σ^* y sea $k \in K$, entonces kA es un subconjunto regular de Σ^* .*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un K -autómata tal que $|\mathcal{A}| = A$, y sea $k \in K$. Consideremos el K -autómata $k\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, kI, T)$, donde $(kI)_q = kI_q$ (I visto como un vector fila), entonces

$$|k\mathcal{A}| = \sum_{p,q \in Q} kl_p E_{pq}^* T_q = k \sum_{p,q \in Q} l_p E_{pq}^* T_q = k|\mathcal{A}| = kA.$$

□

Proposición 4.5. *Un subconjunto A de Σ^* es regular si, y sólo si, el subconjunto $A' = A \cap \Sigma^+$ también lo es.*

Demostración. Sea $\mathcal{A}$ un K -autómata tal que $|\mathcal{A}| = A$. Entonces, existe un K -autómata (normalizado) $\mathcal{A}'$ tal que $|\mathcal{A}'| = |\mathcal{A}| \cap \Sigma^+ = A \cap \Sigma^+ = A'$. Recíprocamente, supongamos que $A \cap \Sigma^+ = A'$ es un subconjunto regular de Σ^* . Como $A'(\theta) = 0$ (ya que $\Sigma^+(\theta) = 0$), podemos escribir $A = k\theta + A'$ donde $k = A(\theta)$. Ahora, como θ es un subconjunto regular de Σ^* , entonces por las proposiciones 4.1 y 4.4 se tiene que $\mathcal{A}$ es regular. □

Proposición 4.6. *Si A y B son subconjuntos regulares de Σ^* , entonces AB también lo es.*

Demostración. Sea $A = k\theta + A'$, $B = l\theta + B'$, con $A' = A \cap \Sigma^+$, $B' = B \cap \Sigma^+$, $k = A(\theta)$ y $l = B(\theta)$. Entonces, $AB = kl\theta + kB' + lA' + A'B'$. Basta probar que $A'B'$ es regular. Para esto, sean $\mathcal{A} = (Q_1, \Sigma, E_1, i_1, t_1)$ y $\mathcal{B} = (Q_2, \Sigma, E_2, i_2, t_2)$ dos K -autómatas normalizados que reconocen a A' y B' respectivamente. Consideremos el K -autómata normalizado $\mathcal{C} = (Q, \Sigma, E, i_1, t_2)$, donde Q es la unión disjunta de Q_1 y Q_2 , salvo la consideración $t_1 = i_2$. Luego un arco en $\mathcal{C}$ es un arco en $\mathcal{A}$ o es un arco en $\mathcal{B}$. Así, claramente

$$|\mathcal{C}| = E_{i_1 t_2}^* = E_{1_{i_1 t_1}}^* E_{2_{i_2 t_2}}^* = |\mathcal{A}||\mathcal{B}| = A'B'.$$

□

Teorema 4.2. *Un subconjunto A de Σ^+ es regular si, y sólo si, existe un entero $n > 1$ y E una matriz $n \times n$ cuyas entradas son subconjuntos de Σ tal que $A = E_{1_n}^+$.*

Demostración. Supongamos que A es un subconjunto regular de Σ^+ , y sea $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, i, t)$ un K -autómata normalizado que reconoce a A . Sin pérdida de generalidad supongamos que $Q = \{1, \dots, n\}$, con $i = 1$ y $t = n$. Como $i \neq t$ se tiene que $n > 1$. Ahora, por el corolario 4.1 se tiene que $|\mathcal{A}| = E_{1_n}^* = E_{1_n}^+ = A$. Recíprocamente, si $A = E_{1_n}^+$, donde E es una matriz $n \times n$ de subconjuntos de Σ y $n > 1$, entonces poniendo $Q = \{1, \dots, n\}$, $I = 1$ y $T = n$, obtenemos un K -autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ que como antes $|\mathcal{A}| = E_{1_n}^+ = A$. □

Corolario 4.2. *Si E es una matriz $n \times n$ de subconjuntos de Σ , entonces para cualesquiera $1 \leq i, j \leq n$, los subconjuntos E_{ij}^* y E_{ij}^+ son regulares.*

Demostración. Inmediato desde el teorema 4.2 □

5 Conclusión

Si $K = \mathbb{N}$ y $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, E, I, T)$ es un K -autómata, entonces Q es un conjunto finito, I y T son dos subconjuntos de Q , y E es un subconjunto de $Q \times \Sigma \times Q$; luego, si I, T y E son no ambiguos se sigue que $\mathcal{A}$ es un autómata finito en el sentido convencional. Así, los K -autómatas, con K un semianillo conmutativo, extienden naturalmente a los autómatas. Mas aún si A es un subconjunto regular de Σ^* con respecto a $\mathbb{N}$, existe un $\mathbb{N}$ -autómata no ambiguo $\mathcal{A}$ tal que $|\mathcal{A}| = A$.

Referencias

- [1] Branicky, M., (1995), *Studies in hibrid systems: Modeling, analysis and control. PhD thesis, Massachusetts inst technol*, Cambridge, Dept. Elec. Fng. And computer Sci.
- [2] Eilemberg, S., (1974), *Automata, languages and machines*, Vol. A. Academic Press, New York.
- [3] Glasserman, P. and Yao, D., (1991), *Algebraic structure of some Discrete Event Sistems with Application*. J. On DEDS, Vol. 1.
- [4] Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D., (1979), *Introduction to Automata theory, languages, and computation*, Addison Wesley USA.
- [5] Mata, G., Ruiz, B., Camacho, C., Méndez, A., Muñoz, S., and Zambrano, H., (2018), *A planning algorithm in a class of discrete event system*. DYNA. 85(206),283-293.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 23–33
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7487462>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(s)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Qualitative study of a mathematical model for the transmission of COVID-19

Estudio cualitativo de un modelo matemático para la transmisión del COVID-19

Yuri Alcántara Olivero (yalcantara@uo.edu.cu)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7208-4229>

Department of Computer Science, Faculty of Natural and Exact Sciences
University of Oriente
Cuba.

Sandy Sánchez Domínguez (sandys@uo.edu.cu)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3788-8413>

Mathematics Department, Faculty of Natural and Exact Sciences
University of Oriente
Cuba

Antonio Iván Ruiz Chaveco (iruiz2005@yahoo.es)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3473-1704>

University of the State of Amazonas
Brazil

Abstract

This paper presents an analysis of the characteristics of the model to simulate the process of infection by COVID 19 in Wuhan China, a set of observations are indicated that represent the bases for its modification and a qualitative study is carried out.

Palabras y frases clave: Mathematical model, epidemic, qualitative analysis.

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis del modelo para simular el proceso de infección por COVID-19 en Whuhan China, se indican un conjunto de observaciones que presentan las bases para su modificación y se realiza un estudio cualitativo.

Key words and phrases: Modelo matemático, epidemia, análisis cualitativo.

1 Introduction

The disease that has most affected humanity in recent years has been COVID-19. In [12] the authors make an exhaustive analysis of the situation presented in Wuhan, China, making a

Received 06/07/2021. Revised 09/09/2021. Accepted 31/08/2022.
MSC (2010): Primary 34C60; Secondary 34C20.
Corresponding author: Sandy Sánchez Domínguez

model that corresponded exactly to the presented situation, predicting the future of the disease in correspondence with the cases presented.

In view of the situation presented in Santiago de Cuba, the authors of [13] adapted the model presented in [12], managing to make sure that the prognoses made corresponded to the reality of the epidemic in that region of the Cuban East. We propose to make a qualitative analysis of this model in order to prove the adaptability of the model to other situations and to other countries outside the country of origin.

Due to these great affects produced by COVID-19 in the world, multiple results have been published both from the point of view of biochemical characteristics, treatment, and from the point of view of modeling to make predictions regarding the future of the pandemic, among others can indicate the works [13, 10, 14, 17, 18], which represent models using ordinary differential equations, which give conclusions regarding the future behavior of the infection process of the population under consideration.

The qualitative study of these models is very important, as this allows us to draw conclusions regarding the future situation of this process; allowing to determine necessary and sufficient conditions under which a possible complication could or could not be prevented. (cf. [15, 16, 17]).

COVID-19 disease is caused by the SARS-CoV-2 coronavirus, a respiratory disease that so many lives have claimed, there are many ideas on how to fight this disease; but the method that most researchers agree on, is given by the method of isolating the infected to prevent possible transmission to other people [11]. One of the treatments that has already given results is interferon alpha-2b, in addition to others already tested in the treatment of other diseases such as AIDS, hepatitis, among others.

Interferon alpha-2b, was developed by the Cuban Genetic Engineering and Biotechnology Center and has already been used in different parts of the world with highly reliable results (cf. [2]).

Today in the world vaccines are applied to raise the immune response of an individual and protect him from disease, among which have been certified are Pfizer-BioNTech, Moderna, Janssen from Johnson & Johnson, Sputnik V and Sinovac-CoronaVac.

Currently in Cuba, they are working with five vaccine candidates against COVID-19, which are passing through different phases of the clinical trial, Soberana 02 and Abdala that are passing through the third phase of the trial, Soberana 01, Soberana Plus and Mambisa that are passing through the second phase of the trial [1, 9]. In the particular case of the candidate, Mambisa explores the intranasal route, while the remaining candidates are intramuscularly [9], particularly Soberana Plus is studied in convalescent patients.

There are multiple works dedicated to the study of the causes and the conditions under which an epidemic may develop, among these we can indicate [7]. The problem of epidemic modeling has always been of great interest to researchers such as the cases of (cf. [3, 4, 6, 5, 8]).

In [15] different problems of real life are treated by means of equations and systems of differential equations, all of them only in the autonomous case; where examples are developed, and other problems and exercises are presented for them to be developed by the reader.

The objective of this work is to make a qualitative study of the SEIR model with three additional classes: the total population size (N), the public perception of risk (D), and the cumulative cases number (C) reported by Lin et al. [13] which simulates through a system ordinary differential equations, the situation presented in Wuhan China, the process of infection of COVID-19 in such a way that it can respond to the current situation in different countries and regions of the world; as it happened in Cuba and other countries, a possibility that had already been indicated in [17], where in addition it was planted how to reverse this situation. This

would give a justification from the theoretical point of view of the conclusions presented in [13], where the situation in Santiago de Cuba is precisely indicated, theoretically demonstrating the predictions made from the adaptation of the model.

2 Initial model presented

Starting from this original system, we will place some modifications depending on the characteristics of the problem, in response to observations that will justify each of the adaptations made, which has the following expression.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\mu S - \frac{\beta(t)}{N} SI \\ \frac{dE}{dt} = -(\sigma + \mu)E + \frac{\beta(t)}{N} SI \\ \frac{dI}{dt} = -(\gamma + \mu)I + \sigma E \\ \frac{dR}{dt} = -\mu R + \gamma I \\ \frac{dN}{dt} = -\mu N \\ \frac{dD}{dt} = -\lambda D + d\gamma I \\ \frac{dC}{dt} = \sigma E \end{array} \right. \quad (2.1)$$

with

$$\beta(t) = \beta_0(1 - \alpha)(1 - \frac{D}{N})^k, \quad (2.2)$$

where σ^{-1} , γ^{-1} , d , λ^{-1} , $\beta(t)$, β_0 , α and k are the mean latent period, the mean infectious period, the proportion of severe cases, the mean duration of public reaction, the dynamic transmission rate, the initial transmission rate, the governmental measure strength and the intensity of individual response, respectively, in addition:

S represents the susceptible population, E represents the exposed population, I represents the infected population, R represents the recovered population, N represents total population, D represents the public perception of risk and C represents the cumulative number of cases.

1. Under the same conditions, not all susceptible people are infected.
2. The recovery time is not the same for all patients.
3. The number of infected people is not exact, as there are asymptomatic patients on the street without being detected.
4. The unknown functions in the system are being considered with some approximation.
5. Disturbances will be introduced to bring us closer to the real situation.
6. How $\beta(t)$ is a limited function with values in the range $[0, \beta_0]$ a constant value within that range will be considered here.

7. To guarantee the validity of the qualitative study, we will make a distinction between the total populations and the allowable concentrations.

3 Qualitative analysis of the modified model

For the qualitative study of the model, the system of differential equations will be modified for which the following variables will be introduced:

$\tilde{i}_1$ is the total infected population at the moment t .

$\tilde{s}_1$ is the total susceptible population at the moment t .

$\tilde{e}_1$ is the total exposed population at the moment t .

$\tilde{r}_1$ is the total recovered population at the moment t .

$\tilde{n}_1$ is the total population at the moment t .

$\tilde{d}_1$ is the total of the population that have the risk at the moment t .

$\tilde{c}_1$ is the total of cases accumulated at the moment t .

In addition it will be denoted by $\bar{i}_1, \bar{r}_1, \bar{s}_1, \bar{e}_1, \bar{n}_1, \bar{d}_1$ and $\bar{c}_1$ the admissible values respectively, of each of the populations. Here the variables will be introduced $s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1$ and c_1 defined as follows: $s_1 = \tilde{s}_1 - \bar{s}_1, e_1 = \tilde{e}_1 - \bar{e}_1, i_1 = \tilde{i}_1 - \bar{i}_1, r_1 = \tilde{r}_1 - \bar{r}_1, n_1 = \tilde{n}_1 - \bar{n}_1, d_1 = \tilde{d}_1 - \bar{d}_1$ and $c_1 = \tilde{c}_1 - \bar{c}_1$, then as $s_1 \rightarrow 0, e_1 \rightarrow 0, i_1 \rightarrow 0, r_1 \rightarrow 0, n_1 \rightarrow 0, d_1 \rightarrow 0$ and $c_1 \rightarrow 0$ when $t \rightarrow \infty$, the following conditions would be met: $\tilde{s}_1 \rightarrow \bar{s}_1, \tilde{e}_1 \rightarrow \bar{e}_1, \tilde{i}_1 \rightarrow \bar{i}_1, \tilde{r}_1 \rightarrow \bar{r}_1, \tilde{n}_1 \rightarrow \bar{n}_1, \tilde{d}_1 \rightarrow \bar{d}_1$ and $\tilde{c}_1 \rightarrow \bar{c}_1$ which would constitute the main objective of this work.

The system (2.1) can be generalized as follows

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds_1}{dt} = -\mu_1 - \beta_1 s_1 i_1 + S_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) \\ \frac{de_1}{dt} = -(\sigma + \mu) e_1 + \beta_1 s_1 i_1 + E_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) \\ \frac{di_1}{dt} = -(\gamma + \mu) i_1 + \sigma e_1 + I_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) \\ \frac{dr_1}{dt} = -\mu r_1 + \gamma i_1 + R_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) \\ \frac{dn_1}{dt} = -\mu n_1 + N_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) \\ \frac{dd_1}{dt} = -\lambda d_1 + d\gamma i_1 + D_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) \\ \frac{dc_1}{dt} = \sigma e_1 + C_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Where

$$\begin{array}{lll} S_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1), & E_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1), & I_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1), \\ R_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1), & N_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1), & D_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) \\ & C_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) & \end{array} \quad (3.2)$$

are perturbations and from the mathematical point of view they are infinitesimals of superior order because they constitute series of power where the inferior degree of their powers is the second; besides that $\beta_1 \in [0, \frac{\beta_0}{N}]$ like this,

$$S_1(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1) = \sum_{|p| \geq 2} s_1^{(p)} s_1^{p_1} e_1^{p_2} i_1^{p_3} r_1^{p_4} n_1^{p_5} d_1^{p_6} c_1^{p_7},$$

with $|p| = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7$, the another series given on the equation (3.2) have a similar development.

The characteristic equation corresponding to the matrix of the linear part of the system (3.1) has the form,

$$k(k + \lambda)(k + \mu)^3(k + (\gamma + \mu))(k + (\mu + \sigma)) = 0$$

As it turns out, it has a zero eigenvalue and another six negatives, this is a critical case, it is necessary to apply the analytical theory of differential equations to draw conclusions regarding the future behavior of the infection process. For this, we will simplify the system, reducing it to almost normal form. By means of a non-degenerate transformation $X = SY$, where $X = \text{col}(s_1, e_1, i_1, r_1, n_1, d_1, c_1)$, $Y = \text{col}(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2)$ and S the matrix of the eigenvalues of the matrix of the linear part of the system

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu-\sigma}{\sigma} \\ 0 & 0 & \frac{-\gamma+\lambda-\mu}{\gamma d} & 0 & 0 & 0 & \frac{-\mu-\sigma}{\gamma-\sigma} \\ 0 & 0 & \frac{\gamma-\lambda+\mu}{\gamma d} & 0 & 1 & 0 & \frac{\gamma(\mu+\sigma)}{\sigma(\gamma-\sigma)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\gamma d(\mu+\sigma)}{(\gamma-\sigma)(-\lambda+\mu+\sigma)} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where additional satisfaction is required of additional algebraic conditions associated with the proper subspaces to guarantee the reduction of the matrix to the diagonal form, so the system is reduced to,

$$\begin{cases} s'_2 &= k_1 s_2 + S_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2) \\ e'_2 &= k_2 e_2 + E_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2) \\ i'_2 &= k_3 i_2 + I_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2) \\ r'_2 &= k_4 r_2 + R_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2) \\ n'_2 &= k_5 n_2 + N_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2) \\ d'_2 &= k_6 d_2 + D_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2) \\ c'_2 &= C_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2) \end{cases} \quad (3.3)$$

Theorem 3.1. *The exchange of variables*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s_2 & = & s_3 + h_1(c_3) \\ e_2 & = & e_3 + h_2(c_3) \\ i_2 & = & i_3 + h_3(c_3) \\ r_2 & = & r_3 + h_4(c_3) \\ n_2 & = & n_3 + h_5(c_3) \\ d_2 & = & d_3 + h_6(c_3) \\ c_2 & = & c_3 + h_7(c_3) + \tilde{h}(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \end{array} \right. \quad (3.4)$$

transforms the system (3.3) into almost normal form,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} s'_3 & = & k_1 s_3 + S_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \\ e'_3 & = & k_2 e_3 + E_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \\ i'_3 & = & k_3 i_3 + I_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \\ r'_3 & = & k_4 r_3 + R_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \\ n'_3 & = & k_5 n_3 + N_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \\ d'_3 & = & k_6 d_3 + D_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \\ c'_3 & = & C_3(c_3) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

where

$$\begin{aligned} & h_1(c_3), h_2(c_3), h_3(c_3), h_4(c_3), h_5(c_3), h_6(c_3), h_7(c_3), \tilde{h}(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \\ & S_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), E_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), I_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \\ & R_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), N_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), D_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \\ & C_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \end{aligned}$$

admit a similar development

$$\begin{aligned} & S_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2), \quad E_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2), \quad I_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2), \\ & R_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2), \quad N_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2), \quad D_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2), \\ & C_2(s_2, e_2, i_2, r_2, n_2, d_2, c_2), \end{aligned}$$

besides that

$$\begin{aligned} & \tilde{h}(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \quad S_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \quad E_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \\ & I_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \quad R_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \quad N_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3), \\ & D_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) \end{aligned}$$

are canceled when $s_3 = e_3 = i_3 = r_3 = n_3 = d_3 = 0$.

Proof. Deriving the transformation (3.3) along the trajectories of the systems (3.3) and (3.5) the

system of equations is obtained,

$$\left\{ \begin{array}{l} S_3 = S_2 - \frac{dh_1}{dc_3} C_3(c_3) \\ E_3 = E_2 - \frac{dh_2}{dc_3} C_3(c_3) \\ I_3 = I_2 - \frac{dh_3}{dc_3} C_3(c_3) \\ R_3 = R_2 - \frac{dh_4}{dc_3} C_3(c_3) \\ N_3 = N_2 - \frac{dh_5}{dc_3} C_3(c_3) \\ D_3 = D_2 - \frac{dh_6}{dc_3} C_3(c_3) \\ C_3 = C_2(c_3) - \frac{dh_7}{dc_3} C_3(c_3) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s_3} (k_1 s_3 + S_3) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial e_3} (k_2 e_3 + E_3) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial i_3} (k_3 i_3 + I_3) \\ \quad - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial r_3} (k_4 r_3 + R_3) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial n_3} (k_5 n_3 + N_3) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial d_3} (k_6 d_3 + D_3) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial c_3} C_3(c_3) \end{array} \right. \quad (3.6)$$

As the $\tilde{h}$ series has the form

$$\tilde{h} = \sum_{|p| \geq 2} \tilde{h}^{(p)} s_3^{p_1} e_3^{p_2} i_3^{p_3} r_3^{p_4} n_3^{p_5} d_3^{p_6} c_3^{p_7}, \quad \text{then} \quad \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s_3} s_3 = p_1 \tilde{h}, \quad \sum_{|p| \geq 2} \tilde{h}^{(p)} s_3^{p_1-1} e_3^{p_2} i_3^{p_3} r_3^{p_4} n_3^{p_5} d_3^{p_6} c_3^{p_7} = p_1 \tilde{h}.$$

Similarly, the expressions $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial e_3} e_3 = p_2 \tilde{h}$, $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial i_3} i_3 = p_3 \tilde{h}$, $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial r_3} r_3 = p_4 \tilde{h}$, $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial n_3} n_3 = p_5 \tilde{h}$, $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial d_3} d_3 = p_6 \tilde{h}$

and $\frac{\partial \tilde{h}}{\partial c_3} c_3 = p_7 \tilde{h}$. Substituting these expressions in the equation (3.6), we obtain

$$\left\{ \begin{array}{l} S_3 = S_2 - \frac{dh_1}{dc_3} C_3(c_3) \\ E_3 = E_2 - \frac{dh_2}{dc_3} C_3(c_3) \\ I_3 = I_2 - \frac{dh_3}{dc_3} C_3(c_3) \\ R_3 = R_2 - \frac{dh_4}{dc_3} C_3(c_3) \\ N_3 = N_2 - \frac{dh_5}{dc_3} C_3(c_3) \\ D_3 = D_2 - \frac{dh_6}{dc_3} C_3(c_3) \\ C_3 + \sum_{i=1}^6 p_i k_i \tilde{h} = C_2(c_3) - \frac{dh_7}{dc_3} C_3(c_3) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s_3} S_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial e_3} E_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial i_3} I_3 - \\ \quad - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial r_3} R_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial n_3} N_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial d_3} D_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial c_3} C_3(c_3) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

To determine the series that intervene in the systems and the transformation, we will separate the coefficients from the powers of degree $p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7)$ in the following two cases.

Case I: Doing $s_3 = e_3 = i_3 = r_3 = n_3 = d_3 = 0$ in the system (3.7) results the system,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_2(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, c_3 + h_7) & = & \frac{dh_1}{dc_3} C_3(c_3) \\ E_2(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, c_3 + h_7) & = & \frac{dh_2}{dc_3} C_3(c_3) \\ I_2(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, c_3 + h_7) & = & \frac{dh_3}{dc_3} C_3(c_3) \\ R_2(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, c_3 + h_7) & = & \frac{dh_4}{dc_3} C_3(c_3) \\ N_2(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, c_3 + h_7) & = & \frac{dh_5}{dc_3} C_3(c_3) \\ D_2(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, c_3 + h_7) & = & \frac{dh_6}{dc_3} C_3(c_3) \\ C_2(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, c_3 + h_7) - C_3(c_3) & = & \frac{dh_7}{dc_3} C_3(c_3) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

The system (3.8) allows the determination of the series coefficients $h_1(c_3)$, $h_2(c_3)$, $h_3(c_3)$, $h_4(c_3)$, $h_5(c_3)$, $h_6(c_3)$ and $C_3(c_3)$ where for being the resonant case $h_7 = 0$, and the remaining series are determined in a unique way.

Case II For the case when $s_3 \neq 0$, $e_3 \neq 0$, $i_3 \neq 0$, $r_3 \neq 0$, $n_3 \neq 0$ and $d_3 \neq 0$ of the system (3.7) it follows that,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} S_3 & = & S_2(s_3 + h_1, e_3 + h_2, i_3 + h_3, r_3 + h_4, n_3 + h_5, d_3 + h_6, c_3 + h_7 + \tilde{h}) \\ E_3 & = & E_2(s_3 + h_1, e_3 + h_2, i_3 + h_3, r_3 + h_4, n_3 + h_5, d_3 + h_6, c_3 + h_7 + \tilde{h}) \\ I_3 & = & I_2(s_3 + h_1, e_3 + h_2, i_3 + h_3, r_3 + h_4, n_3 + h_5, d_3 + h_6, c_3 + h_7 + \tilde{h}) \\ R_3 & = & R_2(s_3 + h_1, e_3 + h_2, i_3 + h_3, r_3 + h_4, n_3 + h_5, d_3 + h_6, c_3 + h_7 + \tilde{h}) \\ N_3 & = & N_2(s_3 + h_1, e_3 + h_2, i_3 + h_3, r_3 + h_4, n_3 + h_5, d_3 + h_6, c_3 + h_7 + \tilde{h}) \\ D_3 & = & D_2(s_3 + h_1, e_3 + h_2, i_3 + h_3, r_3 + h_4, n_3 + h_5, d_3 + h_6, c_3 + h_7 + \tilde{h}) \\ \left(\sum_{i=1}^6 p_i h_i \right) \tilde{h} & = & C_2(s_3, h_1, e_3, h_2, i_3, h_3, r_3, h_4, n_3, h_5, d_3, h_6, c_3 + h_7 + \tilde{h}) - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial s_3} S_3 - \\ & & - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial e_3} E_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial i_3} I_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial r_3} R_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial n_3} N_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial d_3} D_3 - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial c_3} C_3 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

Because the series of the system (3.5) are known expressions, the system (3.9) allows calculating the series $\tilde{h}(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3)$, $S_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3)$, $E_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3)$, $I_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3)$, $R_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3)$, $N_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3)$ and $D_3(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3)$. This proves the existence of variable exchange. $\square$

In the system (3.5) the function $C_3(c_3)$ admits the following development in power series:

$$C_3(c_3) = \alpha c_3^n + \dots$$

Where α is the first non-zero coefficient and n is the corresponding power.

Theorem 3.2. *If $\alpha < 0$ and n is odd, so the trajectories of the system (3.5) are asymptotically stable, otherwise they are unstable.*

Proof. Consider the Lyapunov function defined positive,

$$V(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3) = \frac{1}{2}(s_3^2 + e_3^2 + i_3^2 + r_3^2 + n_3^2 + d_3^2 + c_3^2)$$

whose derivative along the trajectories of the system (3.5) has the following expression,

$$\frac{dV}{dt} = k_1 s_3^2 + k_2 e_3^2 + k_3 i_3^2 + k_4 r_3^2 + k_5 n_3^2 + k_6 d_3^2 + \alpha c_3^{n+1} + \mathcal{R}(s_3, e_3, i_3, r_3, n_3, d_3, c_3)$$

As in $\mathcal{R}$ appear the powers of degrees greater than the second with respect to s_3, e_3, i_3, r_3, n_3 and d_3 and higher degree $n + 1$ with respect to c_3 , the expression of the derivative of V is negative definite, this allows us to affirm that the equilibrium position is asymptotically stable. This result suggests that the limited progression of the COVID-19 epidemic may be due to opportune epidemiological investigations and effective control measures in each source of infection. $\square$

4 Acknowledgments

The authors appreciate the technical support and invaluable feedback provided by Luis Eugenio Valdés García, Adriana Rodríguez Valdés, Manuel de Jesús Salvador Álvarez and Hilda Morandeira Padrón. We also thank to Universidad de Oriente, Dirección de DATYS-Santiago de Cuba, Dirección Provincial de Salud Pública and managers of the provincial government of Santiago de Cuba.

References

- [1] Armas, L. *Cuba: ¿por qué cinco candidatos vacunales?*, on <https://www.cubahora.cu/ciencia-y-tecnologia/cuba-por-que-cinco-candidatos-vacunales>.
- [2] Del Sol, G. *The interferon that treats covid-19*, on <https://www.granma.cu>, 2020.
- [3] Esteva, L and Vargas, C. *Analysis of a dengue disease transmission model*, Math. Biosci., **150**(1998), 131–151. Doi: 10.1016/s0025-5564(98)10003-2.
- [4] Greenhalgh, D. *Some threshold and stability results for epidemic models with a density dependent death rate*, Theoret. Population Biol., **42**(1992), 130–151. Doi: 10.1016/0040-5809(92)90009-1.
- [5] Halloran, M. E., Cochi, S. L., Lieu, T. A., Wharton, M. and Fehrs, L. *Theoretical epidemiologic and morbidity effects of routine varicella immunization of preschool children in the United States*. Am. J. Epidemiol., **140**(1994), 81–104. Doi: 10.1093/oxfordjournals.aje.a117238.
- [6] Halloran, M. E., Watelet, L. and Struchiner, C. J. *Epidemiological effects of vaccines with complex direct effects in an age-structured population*, Math. Biosci., **121**(1994), 193–225. Doi: 10.1016/0025-5564(94)90070-1.
- [7] Hamer, W. H. *Epidemic disease in England*, Lancet, **1**(1906), 733–739.

- [8] Hethcote, H. W. *A Thousand and One Epidemic Models*. Lecture Notes in Biomathematics, **100**(1994). Springer, Berlin. Doi: 10.1007/978-3-642-50124-1_29.
- [9] Infomed temas de salud. *Lo que debe conocer sobre los cuatro candidatos vacunales cubanos contra la COVID-19*, on <https://temas.sld.cu/coronavirus/2021/02/06/lo-que-debe-conocer-sobre-los-cuatro-candidatos-vacunales-cubanos-contra-la-covid-19>.
- [10] Ivorra, B., Ferrández, M. R., Vela-Pérez, M. and Ramos, A. *Mathematical modeling of the spread of the coronavirus disease 2019 (covid-19) taking into account the undetected infections. the case of china*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, (2020), 105303. Doi: 10.1016/j.cnsns.2020.105303.
- [11] Montero, C. A. *Covid 19 with science in China*, on <http://www.cubadebate.cu>, (2020).
- [12] Lin, Q., Zhao, S., Gao, D., Lou, Y., Yang, S., Musa, S., Salihu, Wang, M. H., Cai, Y., Wang, W., and Lin, Y. *A conceptual model for the coronavirus disease 2019 (covid-19) outbreak in wuhan, china with individual reaction and governmental action*, International journal of infectious diseases, **93**(2020), 211–216. Doi: 10.1016/j.ijid.2020.02.058.
- [13] Ramirez-Torres, E. E., Selva, A. R., Rodríguez-Aldana, Y., Sánchez, S., Valdés, L. E., Palú-Orozco, A., Oliveros-Domínguez, E. R., Zamora-Matamoros, L., Labrada-Claro, R., Cobas-Batista, M., Sedal-Yanes, D., Soler-Nariño, O., Valdés-Sosa, P. A., Montijano, J. I., Bergues, L. E. *Mathematical modeling and forecasting of COVID-19: experience in Santiago de Cuba province*, Revista Mexicana de Física, **67** (2021), 123–136. Doi: 10.31349/RevMexFis.67.123.
- [14] Reno, C., Lenzi, J., Navarra, A., Barelli, E., Gori, D., Lanza, A., Valentini, R., Tang, B. and Fantini, M. P. *Forecasting covid-19 associated hospitalizations under different levels of social distancing in lombardy and emiliaromagna, northern italy: Results from an extended seir compartmental model*, Journal of Clinical Medicine, **9**(2020), 1492. Doi: 10.3390/jcm9051492.
- [15] Ruiz, A. I., Fernández, A. A., Libório, A. M., Cabal, C., Batista, E., de Carvalho, E., Chagas, F., Leão, L. M., Lacortt, M., González, O. A., Castanêda, P., Ferreira, R., Sánchez, S., Marinho, T. V., da Costa, T. and Ribeiro, Z. *Modelagem matemática de problemas diversos*, Appris, Brazil, (2018).
- [16] Ruiz, A. I., Sánchez, S., Leão, L. M., Andrade, F., Lacort, M., Ferreira, R., de Carvalho, E., Fernández, A. A. and Da Costa, T. *Applications of Differential Equations in Mathematical Modeling*, CRV, Brazil, (2016).
- [17] Ruiz, A., Leão, L. M., Martén, I., Ferreira, R., Sousa, V., Andrade, F., Lima, P., Iglesias, N., Lacort, M., Sánchez, S. and Ruiz, A. I. *Coronavirus, A Challenge For Sciences, Mathematical Modeling*, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), **16**(2020), 28–34. Doi: 10.9790/5728-1603012834.
- [18] Zhao, S., Musa, S., Lin, Q., Ran, J., Yang, G., Wang, W., Lou, Y., Yang, L., Gao, D. and He, D. *Estimating the unreported number of novel coronavirus (2019-ncov) cases in china in the first half of january 2020: a data driven modelling analysis of the early outbreak*, Journal of clinical medicine, **9**(2020), 388. Doi: 10.3390/jcm9020388.

-
- [19] Primer-Apellido Inicial-Segundo-Apellido.(opcional), Primer-Nombre; *Título del artículo*, Revista, **Volumen**(Número) (Año), Página inicial - Página final.
- [20] Primer-Apellido Inicial-Segundo-Apellido.(opcional), Primer Nombre; *Título de disertación*, Tipo de disertación, Institución, Año.
- [21] Primer-Apellido, Primer-Nombre; *Título del libro*, Editorial, Numero-de-Edición, Lugar-de-edición, año.
- [22] Primer-Apellido Inicial-Segundo-Apellido.(opcional), Primer Nombre; *Título del artículo*. En: Título del libro o proceeding (nombre de los editores), Editorial, (año), Página-inicial – Página-final.
- [23] Primer-Apellido Inicial-Segundo-Apellido.(opcional), Primer Nombre; *Título del artículo*, preprint, nombre del repositorio or institución, (año)
- [24] Nombre del sitio web, Tópico consultado, año-elaboración-sitio-web, fecha-última-modificación-sitio-web, ~~dirección-electrónica-sitio-web~~.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 34–47
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7487440>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Matriz de adyacencia de Ramsey del grafo $K_{R(G,H)}$ con componentes h -buenas y las relaciones geométricas entre lados y vértices de los grafos G , H y $K_{R(G,H)}$

Ramsey adjacency matrix of the graph $K_{R(G,H)}$ with h -good components and the geometric relationship that exists between sides and vertices of the graphs G , H and $K_{R(G,H)}$.

José Figueroa (jose3765@gmail.com)

Departamento de Química
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Felicia Villarroel (feliciavillarroel@gmail.com)

Departamento de Matemática
Universidad de Oriente
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Henry Ramírez (hlramirez6@hotmail.com)

Departamento de Higiene y Seguridad Laboral
Universidad Clodosbaldo Russián
Cumaná, República Bolivariana de Venezuela.

Tobías Rosas (tjrosas@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8085-5011>
Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo, República Bolivariana de Venezuela.

Resumen

Sean G y H dos grafos simples, finitos, y no vacíos. El número de Ramsey $R(G, H)$, se define como el menor entero positivo n , tal que hay un grafo F de orden n que contiene un subgrafo G' copia monocromática isomorfa a G , o el complemento de F (denotado por $\overline{F}$) contiene un subgrafo H' copia monocromática isomorfa a H . Se dice que el grafo completo K_n contiene componentes h -buena, si para toda secuencia s_i , con $i = 1, \dots, m+1$, donde m es la talla de cada secuencia que colorean los lados del grafo completo $K_n = F \cup \overline{F}$, tal que se pueda extraer de F , al menos una copia monocromática G' isomorfa a G , o $\overline{F}$ contenga al menos una copia monocromática H' isomorfa a H . En este manuscrito se presentan dos resultados principales, a saber: 1) Se determinan los lados incidentes de cada vértices $v_1, \dots, v_n$ del grafo

Recibido 10/09/2021. Revisado 20/10/2021. Aceptado 15/06/2022.

MSC (2010): Primary 05C55; Secondary 05C15.

Autor de correspondencia: José Figueroa

G de orden n , a través de su matriz de adyacencia $A(G)$, obteniendo la fórmula $\text{Traz}(M) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E(G)|$, donde $M = (A(G))^2$ es una matriz de orden $n \times n$, $\text{Traz}(M)$ es la traza de la matriz M , y $d(v_i)$ es el grado del vértice v_i para $i = 1, \dots, n$. 2) Se determina la matriz de adyacencia Ramsey del menor grafo completo $K_{R(G,H)}$ con componentes h -buena. Se determina a través de los elementos m_{ij} de M , las relaciones existentes entre los lados y los vértices de los grafos G y H , con respecto a $K_{R(G,H)}$ y se obtuvieron las siguientes propiedades:

- 1) $\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij}|E(K_{R(G,H)})| = k|E(K_{R(G,H)})|$, con $k = m_{ij} \in M$.
- 2) Existen $r, s \in \mathbb{Z}^+$, dependientes de $E(G)$, $E(H)$ y $E(K_{R(G,H)})$, tal que $\frac{E(K_{R(G,H)})}{r} = \frac{E(G)}{s}$.
- 3) Existen $p, q \in \mathbb{Z}^+$, dependientes de $V(G)$, $V(H)$ y $V(K_{R(G,H)})$, tal que, $\frac{V(K_{R(G,H)})}{p} = \frac{V(H)}{q}$.
- 4) $\text{Traz}(M) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E(K_n)|$.

Palabras y frases clave: Teoría Combinatoria, Números de Ramsey, Grafos con componentes h -buena, Matriz de adyacencia, Producto de Matrices, Matriz diagonal, Matrices triangulares.

Abstract

Let be G and H two simple graphs, finite and non-empty. The Ramsey $R(G, H)$ number, is defined as the smallest positive integer n , such that there is a graph F , that contains a monochrome copy G' isomorphic to G or the complement of F (denote by $\bar{F}$), contains a monochrome copy H' isomorphic to H . It is said that the complete graph K_n contains components h -good, if for every sequence s_i of size m , with $i = 1, \dots, m+1$, that colors the sides of the complete graph $K_n = F \cup \bar{F}$, such that can be extracted from F , at least one G' monochrome copy isomorphic to G or $\bar{F}$ contains at least one H' monochrome copy isomorphic to H . Two main results are presented in this manuscript, these are: 1) The incident sides of each vertex $v_1, \dots, v_n$ of the graph G are determined, through an adjacency matrix $A(G)$, getting the formula $\text{Traz}(M) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E(G)|$, where $M = (A(G))^2$ is a square matrix of order $n \times n$, $\text{Traz}(M)$ is the trace of the matrix M , and $d(v_i)$ is the degree of the v_i for $i = 1, \dots, n$. 2) The Ramsey adjacency matrix of the least complete graph $K_{R(G,H)}$ with components h -good is determined. It is determined through the elements m_{ij} of M , the relationships between the sides and the vertices of the graphs G and H , with respect to $K_{R(G,H)}$ and the following properties were obtained:

- 1) $\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij}|E(K_n)| = k|E(K_n)|$, with $k = m_{ij} \in M$.
- 2) There exist $r, s \in \mathbb{Z}^+$, dependent on $E(G)$, $E(H)$ and $E(K_{R(G,H)})$, such that $\frac{E(K_n)}{r} = \frac{E(G)}{s}$.
- 3) There exist $p, q \in \mathbb{Z}^+$, dependent on $V(G)$, $V(H)$ and $V(K_{R(G,H)})$, such that $\frac{V(K_{R(G,H)})}{p} = \frac{V(H)}{q}$.

$$4) \text{ Traz}(M) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E(K_{R(G,H)})|.$$

Key words and phrases: Combinatorial Theory, Ramsey Numbers, Graph with components h -good, Adjacency Matrix, Product of Matrices, Diagonal Matrix, Triangular Matrices.

1 Introducción

En este trabajo se consideran todos los grafos simples, finitos, sin lazos y no vacíos. En [1] Diestel, expresa que un *grafo* G , es un par de conjuntos $(V(G), E(G))$, denotado por $G := (V(G), E(G))$, donde $V(G)$ es un conjunto no vacío de elementos llamados *vértices* o *nodos* y $E(G)$ es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V , llamados *lados* o *aristas*. Si G es un grafo que no posee lazos ni lados múltiples, entonces G se dice *grafo simple*. Los *vecinos* de un vértice $u \in V(G)$, denotado por $N_G(u)$, es el conjunto de todos los vértices $v \in V(G)$ tal que $(u, v) \in E(G)$. El *orden* de G , denotado por $|G|$, es el número de vértices de G . Dado un grafo simple F , su *complemento* será denotado por $\overline{F}$, y además se tiene que el *grafo completo* $K_n = F \cup \overline{F}$. En [2] Figueroa, se dice que el grafo completo K_n contiene *componentes h -buena*, si para toda secuencia s_i , con $i = 1, \dots, m+1$, donde m es el tamaño de cada secuencia que colorea los lados del grafo completo $K_n = F \cup \overline{F}$, tales que pueda extraer de F , al menos una copia monocromática G' isomorfa a G o extraer de $\overline{F}$ al menos una copia monocromática H' isomorfa a H . En [3] Grassmann y Tremblay, definen la *matriz de adyacencia* $A(G)$ de un grafo G con n vértices, $v_1, \dots, v_n$, como una matriz cuadrada simétrica de orden $n \times n$ cuyos elementos $a_{i,j}$ se definen de la siguiente manera:

$$a_{i,j}(G) = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E(G) \\ 0 & \text{si } (v_i, v_j) \notin E(G), \end{cases}$$

Una matriz cuadrada $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^n$, de orden n , se dice *simétrica* si $m_{ij} = m_{ji}$, para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$, es decir, $M = M^t$ (la transpuesta de la matriz). Además, M se denomina *diagonal* si $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Se denotará por $\text{Traz}(M)$ a la traza de la matriz M .

Nótese que de una matriz cuadrada $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^n$, de orden n , se puede obtener una matriz diagonal $\text{Diag}(M)$ definida por $\text{Diag}(M) = [m_{ij} \times \delta_{ij}]_{i,j=1}^n$, con

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\text{Diag}(M) = [m_{i,j} \times \delta_{ij}]_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & m_{nn} \end{pmatrix},$$

de manera que $\text{Traz}(M) = \text{Traz}(\text{Diag}(M)) = \sum_{i=1}^n m_{ii}$.

2 Grados de los vértices de un grafo G , a través de su matriz de adyacencia.

Se darán a continuación algunos ejemplos ilustrativos donde se refleja parte de los resultados de esta sección.

Ejemplo 2.1. Sea G el grafo diamante como se observa en la Figura 1.

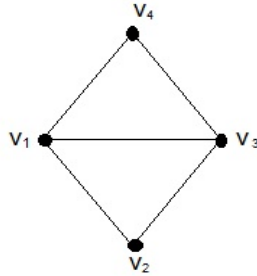


Figura 1: $K_4 - l$, grafo diamante

Sea la matriz de adyacencia $A(G)$ del grafo diamante G , donde $A(G)$ es una matrices simétrica, ya que cada lado del grafo G se cuenta dos veces en G .

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, definiendo la matriz $M = (A(G))^2$ por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que M es una matriz simétrica, ya que el producto de matrices simétricas es un matriz simétrica.

Luego, calculando la matriz diagonal $\text{Diag}(M)$, se tiene que

$$\text{Diag}(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Traz}(M) = \sum_{i=1}^4 m_{ii} = \sum_{i=1}^4 d(v_i) = 3 + 2 + 3 + 2 = 10 = 2 \times 5 = 2|E(G)|.$$

Ejemplo 2.2. Sea G el grafo pez como se observa en la Figura 2.

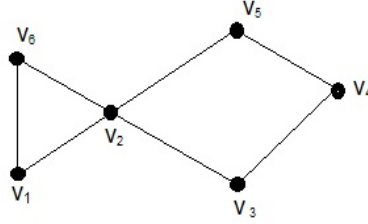


Figura 2: Grafo pez

Sea la matriz de adyacencia $A(G)$ del grafo pez G .

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, definiendo la matriz $M = (A(G))^2$ por

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observe que M , es una matriz simétrica en el sentido usual. Entonces,

$$Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Traz(M) = \sum_{i=1}^6 m_{ii} = \sum_{i=1}^6 d(v_i) = 2 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 = 14 = 2 \times 7 = 2|E(G)|.$$

Ejemplo 2.3. Sea G el grafo árbol como se observa en la Figura 3.

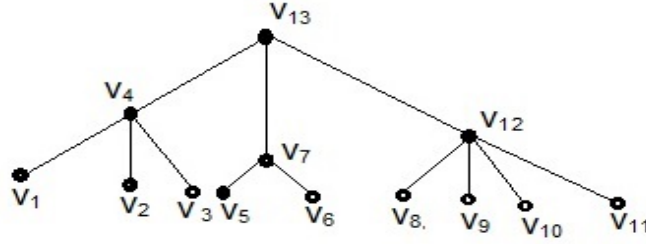


Figura 3: Grafo árbol.

Sea la matriz de adyacencia $A(G)$ del grafo árbol.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $M = (A(G))^2$. Así, la matriz M es una matriz simétrica y su diagonal está dada por.

$$Diag(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$Traz(M) = Traz([m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{13}) = \sum_{i=1}^{13} m_{ii} = \sum_{i=1}^{13} d(v_i) = 24 = 2 \times 12 = 2|E(G)|.$$

Teorema 2.1. Sea $A(G)$ la matriz de adyacencia de un grafo simple G cualesquiera, finito y sin lazos. Sea $M = (A(G))^2$, con $\text{Diag}(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^n$, entonces

$$\text{Traz}(M) = \text{Traz}([m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^n) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E(G)|.$$

Demostración. Sea $A(G)$ la matriz de adyacencia de un grafo simple cualquiera G , sin lazos. Como $A(G)$ es una matriz simétrica, entonces $a_{ij} = a_{ji}$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Luego, considere $M = (A(G))^2$ la cual es también una matriz simétrica, porque el producto de matrices simétricas es simétrica. Nótese que, por definición de M , el elemento m_{ii} está dado por la expresión

$$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 \quad (2.1)$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Como los elementos o entradas de la matriz $A(G)$ son 0 y 1 se tiene que la expresión en (2.1) se transforma en

$$a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} \quad (2.2)$$

Por otro lado, obsérvese que la suma de las entradas de la fila i -ésima de la matriz $A(G)$ da como resultado el número de vértices de $V(G)$ relacionados con el vértice v_i , es decir,

$$d(v_i) = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{in} \quad (2.3)$$

Ahora, sea δ_{ij} el delta de Kronecker y considerando la matriz $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^n$, se puede obtener la matriz diagonal $\text{Diag}(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^n$. Así, por las ecuaciones (2.2) y (2.3), se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Traz}(M) &= (a_{11} + \dots + a_{1n}) + \dots + (a_{n1} + \dots + a_{nn}) \\ &= d(v_1) + \dots + d(v_n) \\ &= 2|E(G)| \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\text{Traz}(M) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E(G)|.$$

□

3 Matriz de adyacencia Ramsey $A(K_{R(G,H)})$, y la relación existente entre los lados y vértices de los grafos G , H y $K_{R(G,H)}$.

Definición 3.1. Sean G y H dos grafos simples cualesquiera, finitos y sin lazos. Se llama *matriz de adyacencia Ramsey*, denotada por $A(K_{R(G,H)})$, a la matriz de adyacencia del menor grafo completo $K_{R(G,H)} = F \cup \overline{F}$, tal que F contiene una copia monocromática G' isomorfa a G o $\overline{F}$ contiene una copia monocromática H' isomorfa a H .

Definición 3.2. Dada la matriz $A(K_{R(G,H)})$ como en la Definición 3.1, defínase la matriz $M = (A(K_{R(G,H)}))^2$, la cual es una matriz simétrica y satisface las siguientes condiciones:

$$1) \sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij} |E(K_{R(G,H)})| = k |E(K_{R(G,H)})|, \text{ con } k = m_{ij} \in M.$$

$$2) \text{ Traz}(M) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E(K_{R(G,H)})|.$$

Definición 3.3. Una matriz M como en la Definición 3.2, se dice que es *lado de Ramsey* si G es bueno con respecto a H , y existen enteros $t, o, p, q, r, s \in \mathbb{Z}^+$, tales que se satisfacen las siguientes relaciones geométricas entre los lados de los grafos G, H , y $K_{R(G,H)}$:

$$\text{i)} \frac{|E(K_{R(G,H)})|}{p} = \frac{|E(G)|}{q} \quad \text{ii)} \frac{|E(K_{R(G,H)})|}{s} = \frac{|E(H)|}{r} \quad \text{iii)} \frac{|E(G)|}{o} = \frac{|E(H)|}{t}.$$

Definición 3.4. Sean G y H dos grafos simples cualesquiera, finitos y sin lazos. Sea $l = \max\{|G|, |H|\}$. Una matriz M como en la Definición 3.2 se dice que es *vértice de Ramsey*, si existen enteros $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}^+$ tales que se satisfacen las siguientes relaciones geométricas entre los vértices de los grafos G, H y K_l :

$$\text{i)} \frac{|V(K_{R(G,H)})|}{b} = \frac{|V(G)|}{a} \quad \text{ii)} \frac{|V(K_{R(G,H)})|}{d} = \frac{|V(H)|}{c} \quad \text{iii)} \frac{|V(G)|}{e} = \frac{|V(H)|}{f}.$$

Ejemplo 3.1. Sea $G = K_{1,n}$ el grafo estrella, para $n \geq 4$ y sea $H = K_4 - l$ el grafo diamante, si $l = \max\{|G|, |H|\} = \max\{5, 4\} = 5$. Luego $R(G, H) = 5$, para $n = 4$. $R(G, H)$ no puede ser 4, pues $|E(F)| < |E(G)|$ y $|E(\bar{F})| < |E(H)|$, (ver [2]).

La matriz de adyacencia de $R(G, H)$ está dada por:

$$A(K_{R(G,H)}) = [a_{ij}]_{i,j=1}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $M = (A(K_{R(G,H)}))^2$, entonces

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nótese que M , es una matriz simétrica. Además, como $K_{R(G,H)}$ es un grafo completo se tiene que $a_{ij} \neq 0$ para $i > j$ y $a_{ij} \neq 0$ para $i < j$. Así, $m_{ij} \neq 0$ para $i < j$ e $i > j$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i>j} m_{ij} &= \sum_{i<j} m_{ij} = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 \\ &= 3(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 3 \times 10 = 3 \times |E(K_5)|. \end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 3 \times |E(K_5)|.$$

Como $3 \times |E(K_5)| = 3 \times 10 = 15 \times 2$, entonces existe $q = 2 \in \mathbb{Z}^+$, tales que

$$3 \times |E(K_5)| = \left(\frac{2}{2}\right) \times (15 \times 2) = \frac{15 \times |E(G)|}{2}.$$

Así, $3 \times |E(K_5)| = \frac{15 \times |E(G)|}{2}$ y por tanto $|E(K_5)| = \frac{5 \times |E(G)|}{2}$.

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 3 \times |E(K_5)| = 6 \times 5 = 6 \times |E(H)|.$$

Luego, $3 \times |E(K_5)| = 6 \times |E(H)|$ de donde $|E(K_5)| = 2 \times |E(H)|$. La relación geométrica entre los lados de $K_{R(G,H)}$ y los lados de los grafos G y H .

Obsérvese ahora que

$$|E(K_5)| = \frac{5 \times |E(G)|}{2} \quad \text{y} \quad |E(K_5)| = 2 \times |E(H)|,$$

igualando ambos resultados se obtiene:

$$\frac{|E(G)|}{4} = \frac{|E(H)|}{5}.$$

La relación geométrica entre los vértices de $K_{R(G,H)}$ y entre los vértices de G , H y K_l , a través de las matrices triangular superior e inferior esta dada a continuación

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 30 = 6 \times 5 = 6|V(K_5)| = 6|V(G)|$$

de manera que $|V(K_5)| = |V(G)|$ y así existe $d = 2 \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$6 \times |V(K_5)| = (15 \times 2) \times \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{15}{2} |V(H)|.$$

Luego, como $|V(K_5)| = |V(G)|$ y $|V(K_5)| = 5 \times \frac{|V(H)|}{4}$ e igualando las expresiones resulta:

$$\frac{|V(G)|}{5} = \frac{|V(H)|}{4}.$$

Ahora, la matriz $\text{Diag}(M)$ está dada por

$$\text{Diag}(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^5 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\text{Traz}(M) = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20 = 2 \times 10 = 2|E(K_5)|$$

Ejemplo 3.2. Sea G el grafo árbol del Ejemplo 2.3, Figura 3 y $H = W_n$ el grafo rueda, para $n \geq 13$, si $l = \max\{|G|, |H|\} = \max\{13, 14\} = 14$, luego $R(G, H) = n + 1$, para $n = 13$. $R(G, H)$ no puede ser 13, pues $|E(F)| < |E(G)|$ y $|E(\overline{F})| < |E(H)|$, (ver [2]).

Así, $K_{R(G, H)}$ con $R(G, H) = 14$, es el menor grafo completo que, coloreado con cada secuencia s_i de talla $m = 91$, para $i = 1, 2, \dots, 92$, satisface que F contiene una copia monocromática G' isomorfa a G o $\overline{F}$ contiene una copia monocromática H' isomorfa a H .

Sea la matriz de adyacencia del grafo $K_{R(G, H)}$, dada por

$$A(K_{R(G, H)}) = [a_{ij}]_{i, j=1}^{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sea $M = (A(K_{R(G, H)}))^2$, es decir,

$$M = \begin{pmatrix} 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 12 \\ 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 \end{pmatrix}.$$

Nótese que M , es una matriz simétrica. Además, como $K_{R(G, H)}$ es un grafo completo se tiene $a_{ij} \neq 0$ para $i > j$ y $a_{ij} \neq 0$ para $i < j$. Así, $m_{ij} \neq 0$ para $i < j$ e $i > j$. Por tanto,

$$\sum_{i > j} m_{ij} = \sum_{i < j} m_{ij} = m_{ij} |E(K_{R(G, H)})| = 12 |E(K_{R(G, H)})|.$$

$$\sum_{i > j} m_{ij} = \sum_{i < j} m_{ij} = 12 \times 91 = 91 \times |E(G)|.$$

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 42 \times |E(H)|.$$

La relación geométrica entre los lados de $K_{R(G,H)}$, y los lados de los grafos G y H .

$$12 \times |E(K_{14})| = 91 \times |E(G)| \implies \frac{|E(K_{14})|}{91} = \frac{|E(G)|}{12} = 1.$$

$$12 \times |E(K_{14})| = 42 \times |E(H)| \implies \frac{|E(K_{14})|}{7} = \frac{|E(H)|}{2} = 13.$$

$$91 \times |E(G)| = 42 \times |E(H)| \implies \frac{|E(G)|}{6} = \frac{|E(H)|}{13} = 2.$$

La relación geométrica entre los vértices de $K_{R(G,H)}$, y entre los vértices de G y H a través de las matrices triangular superior e inferior se muestra a continuación

$$\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = 78|V(K_{14})| = 84|V(G)| \quad y \quad \sum_{i>j} m_{ij} = 78|V(H)|.$$

Luego,

$$78|V(K_{14})| = 84|V(G)| \implies \frac{|V(K_{14})|}{14} = \frac{|V(G)|}{13} = 1$$

$$78|V(K_{14})| = 78|V(H)| \implies |V(K_{14})| = |V(H)| = 14,$$

y

$$84|V(G)| = 78|V(H)| \implies \frac{|V(G)|}{13} = \frac{|V(H)|}{14} = 1.$$

Ahora, la matriz $\text{Diag}(M)$ está dada por: $\text{Diag}(M) = [m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{14}$

$$\text{Diag}(M) = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\text{Traz}(M) = \text{Traz}([m_{ij} \times \delta_{i,j}]_{i,j=1}^{14}) = \sum_{i=1}^{14} d(v_i) = 2|E(R(G,H))|.$$

Teorema 3.1. Sean G y H dos grafos simples cualesquiera, finitos y no vacíos. Si G es bueno con respecto a H y $A(K_l) = A(K_{R(G,H)})$ es la matriz de adyacencia del menor grafo completo que contiene una copia monocromática isomorfa G o una copia monocromática isomorfa a H , con $M = [m_{ij}]_{i,j=1}^l = (A(K_l))^2$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- 1) $\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij} = m_{ij}|E(K_l)| = k|E(K_l)|$, con $k = m_{ij} \in \mathbb{Z}^+$.
- 2) Existen $r, s \in \mathbb{Z}^+$, dependientes de $E(G)$, $E(H)$ y $E(K_l)$, tales que $\frac{|E(K_l)|}{r} = \frac{|E(G)|}{s}$.
- 3) Existen $p, q \in \mathbb{Z}^+$, dependientes de $V(G)$, $V(H)$ y $V(K_l)$, tales que $\frac{|V(K_l)|}{p} = \frac{|V(H)|}{q}$.
- 4) $\text{Traz}(M) = \sum_{i=1}^l d(v_i) = 2|E(K_l)|$.

Demostración. 1) Sean G y H dos grafos simples cualesquiera, finitos y no vacíos. Si G es bueno con respecto a H , entonces existe un conjunto de secuencias s_i de talla m , con $i = 1, 2, \dots, m+1$, donde cada s_i , colorea los lados del grafo completo $K_l = F \cup \bar{F}$, tal que del grafo F puede extraerse al menos una copia monocromática G' isomorfa G , o de $\bar{F}$ puede extraerse al menos una copia monocromática H' isomorfa H . Considérese la matriz de adyacencia $A(K_l) = [a_{ij}]$, del menor grafo completo K_l , que contiene componentes h -buena, la cual es simétrica de orden $l \times l$ y su elementos están dados por

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.1)$$

Defínase la matriz $M = (A(K_l))^2$, también simétrica de orden $l \times l$. Tómesese una partición de la matriz M , en tres matrices: una matriz triangular superior (m_{ij}) con $j > i$, una triangular inferior (m_{ij}) con $i > j$ y la matriz $\text{Diag}(M)$. Nótese, que el número de elementos distintos de cero de M es l^2 y el de la matriz $\text{Diag}(M)$ es l (justo los elementos de la diagonal de M). Luego, sea w el número de elementos distintos de cero de la matriz triangular superior, entonces como M es simétrica se tiene que la matriz triangular inferior tiene w elementos distintos de cero, y por tanto $l^2 = l + 2w$ de donde se obtiene que $w = \frac{l(l-1)}{2}$. Como K_l es completo y M simétrica, todos los elementos m_{ij} , para $i \neq j$ son iguales, por la ecuación (3.1), y además $\sum_{i>j} m_{ij} = \sum_{i<j} m_{ij}$. Sin pérdida de generalidad,

$$\begin{aligned} \sum_{j>i} m_{ij} &= (m_{12} + \dots + m_{1l}) + (m_{23} + \dots + m_{2l}) + \dots + (m_{(l-2)l} + m_{(l-2)l}) + m_{(l-1)l} \\ &= m_{12} \times (1 + 1 + \dots + 1 + 1) = m_{12} \times w = m_{12} \times \frac{l(l-1)}{2} = k|E(K_l)|. \end{aligned}$$

2) Usando el resultado del ítem 1) se tiene que

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \sum_{i>j} m_{ij} = k|E(K_l)| \quad (3.2)$$

Como $|E(G)| < |E(K_l)|$ y $|E(H)| < |E(K_l)|$, existen $\frac{c}{b}, \frac{e}{d}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}^+$, tal que

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{c}{b}\right) |E(G)| \quad (3.3)$$

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{e}{d}\right) |E(H)| \quad (3.4)$$

Para la ecuación (3.3) basta tomar $c = k|E(K_l)|$ y $d = |E(H)|$. De forma similar para la ecuación (3.4).

Luego, igualando las ecuaciones (3.2) y (3.3) se tiene

$$\frac{|E(K_l)|}{c} = \frac{|E(G)|}{kb},$$

con $w = kb, c \neq w$, ya que $|E(K_l)| = |E(F)| + |E(\bar{F})|$ y $|E(G)| \leq |E(F)|$ o $|E(H)| \leq |E(\bar{F})|$.

Igualando las ecuaciones (3.2) y (3.4) se tiene

$$\frac{|E(K_l)|}{e} = \frac{|E(H)|}{kd},$$

con $u = kd, e \neq u$, puesto que $|E(K_l)| = |E(F)| + |E(\bar{F})|$ y $|E(G)| \leq |E(F)|$ o $|E(H)| \leq |E(\bar{F})|$.

Igualando las ecuaciones (3.3) y (3.4) se tiene que

$$\frac{|E(H)|}{cd} = \frac{|E(G)|}{eb}.$$

Haciendo $r = be$ y $s = cd$, entonces $\frac{|E(H)|}{r} = \frac{|E(G)|}{s}$.

3) Sean $f, j, l, p, q, x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, existen $\frac{x}{y}, \frac{z}{f}, \frac{j}{l}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$, tal que

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{x}{y}\right) |V(K_l)|, \quad (3.5)$$

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{z}{f}\right) |V(G)| \quad (3.6)$$

$$\sum_{j>i} m_{ij} = \left(\frac{j}{l}\right) |V(H)| \quad (3.7)$$

Luego, de igualando las ecuaciones (3.5) y (3.6) se tiene que

$$\frac{|V(K_l)|}{yz} = \frac{|V(G)|}{xf},$$

Tomando, $q = xf$ y $p = yz$, entonces $\frac{|V(K_l)|}{p} = \frac{|V(G)|}{q}$.

De forma similar a la anterior se igualan las ecuaciones (3.5) - (3.7), y (3.6) - (3.7), obteniendo respectivamente que

$$\frac{|V(K_l)|}{yj} = \frac{|V(H)|}{xl} \quad \text{y} \quad \frac{|V(G)|}{fj} = \frac{|V(H)|}{zl}$$

4) Si $v_1, \dots, v_l$ son los vértices del grafo K_l , entonces aplicando el Teorema 2.1, se obtiene que

$$\text{Traz}(M) = \sum_{i=1}^n d(v_i) = 2|E(K_l)|.$$

□

Referencias

- [1] Diestel, R. (2000) *Graph Theory*. Second Edition, Spriner.
- [2] Figueroa, J.; Villarroel, F.; Ramírez, H. y Otero, J.; *Los Números de Ramsey con componente h-buena y secuencias simétricas*, Divulgaciones Matemáticas, **20**(1) (2019), 78–90.
- [3] Grassmann, Winfried K. y Tremblay, Jean-Paul. (2000) *Matemática Discreta y Lógica, una perspectiva desde la ciencia de la computación*. 3^{ra} reimpresión, Editorial Prentice Hall, España. ISBN 84-89660-04-2.
- [4] Mann, H. B.; *Two Addition Theorems*, Journal of Combinatorial Theory, **8** (1967). 233–235.
- [5] Villarroel, F.; Figueroa, J.; Márquez, H. and Anselmi, A.; *Un método algorítmico para el cálculo del número Baricéntrico de Ramsey para el grafo estrella*. Bol.soc. Paran. Mat. (3s) **36**(2) (2018), 169–183.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 48–65
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7487484>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Notas sobre el desempeño de los estimadores fronteras de densidad con núcleo localmente adaptable y con conjunto difuso

*Notes on the performance of the boundary locally adaptive kernel and boundary
fuzzy set density estimators*

Jesús A. Fajardo
(jfajardogonzalez@gmail.com; jfajardo@udo.edu.ve)
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3762-4824>
Departamento de Matemática Núcleo Sucre Universidad de Oriente
Cumaná 6101, República Bolivariana de Venezuela

Resumen

Estas notas proporcionan un nuevo resultado relacionado con el problema de estimación no paramétrica de la función de densidad, no basado en núcleos, el cual permite extender el alcance del método de estimación de la densidad con conjunto difuso. Para ello y bajo la presencia del problema frontera en los estimadores de la densidad con núcleo y con conjunto difuso, se considerarán los estimadores fronteras de la densidad con núcleo localmente adaptable y con conjunto difuso, con el propósito de comparar sus desempeños. Cada rendimiento se obtiene tomando en cuenta cuatro formas de densidades específicas y dos conjuntos de datos reales. Los resultados de las extensas simulaciones muestran que el estimador frontera con conjunto difuso tiene mejor rendimiento en los puntos cercanos a 0, en una dispersión de la vecindad del parámetro b_n , cuando se comparó con el rendimiento del estimador frontera localmente adaptable, para las cuatro formas de densidades consideradas. Aquí, b_n es el ancho de banda del estimador con conjunto difuso.

Palabras y frases clave: Estimador de densidad con conjunto difuso, estimación frontera, estimador de la densidad con núcleo adaptable.

Abstract

These notes provide a new result related to the nonparametric density function estimation problem, not based on kernels, which allows to extend the range of the fuzzy set density estimation method. For this, and under the presence of the boundary problem in the density estimators with kernel and with fuzzy set, the boundary density estimators with locally adaptable kernel and with fuzzy set will be considered, with the purpose of comparing their performances. Each performance is obtained by taking into account four forms of specific densities and two sets of real data. The results of the extensive simulations show that the boundary fuzzy set estimator performs best at points close to 0, at a spread from the neighborhood of the parameter b_n , when compared with the performance of the boundary locally

Recibido 20-09-2021. Revisado 28-11-2021. Aceptado 30/08/2022.

MSC (2010): Primary 62G07; Secondary 62G05.

Autor de correspondencia: Jesús Fajardo.

Esta investigación ha sido apoyada por una subvención de la Academia de Ciencias de América Latina-ACAL.

adaptive estimator, for the four density forms considered. Here, b_n is the bandwidth of the fuzzy set estimator.

Key words and phrases: Fuzzy set density estimator, boundary estimation, adaptive kernel density estimator.

1 Introducción

Las notas del presente artículo están enmarcadas dentro del contexto general de la teoría de estimación no paramétrica de la función de densidad f , con muestras independientes. No obstante, estas se desarrollan considerando un aspecto particular de la teoría señalada previamente: la estimación frontera de f con estimadores no basados en núcleos.

En cada soporte o dominio $[0, \infty)$ ó $[0, 1]$ de una densidad f , los puntos fronteras e interiores se definen a través de un parámetro de suavizado o ancho de banda p_n , $p_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, donde ambos tienen forma general $x = s p_n$, $s \in [0, 1)$, y $z = k p_n$, $k \geq 1$, respectivamente. Observe que, cada punto frontera e interior satisface $x \in [0, p_n)$ y $z \geq p_n$. Los intervalos $[0, p_n)$ y $[p_n, \infty)$ se llaman región frontera e interior, respectivamente. Cabe destacar que los términos n y p_n forman parte de la expresión que define al estimador de f , donde n es el tamaño de la muestra independiente que se considera para estimar f . La clasificación anterior, para los puntos del soporte de f , se debe a la presencia del fenómeno o problema “efectos fronteras” en el estimador de f . En estas notas, el fenómeno anterior será reseñado como problema frontera y no se tratará teóricamente. No obstante, se subraya que el problema frontera afecta el desempeño general del estimador de f , ya que este es diferente en los puntos fronteras e interiores. Teóricamente ocurre lo siguiente, en los puntos fronteras el sesgo del estimador de f tiene una tasa o velocidad de convergencia más lenta que en los puntos interiores. Técnicamente se tiene que, en los puntos fronteras el sesgo del estimador de f tiene una tasa de convergencia de orden $O(p_n)$ en lugar de $O(p_n^2)$, donde el orden óptimo para la tasa de convergencia del sesgo del estimador de f es $O(p_n^2)$ (ver Stone [17]).

La teoría de estimación no paramétrica de f , con muestras independientes, está formada por dos clases o grupos de estimadores: los tipo núcleo y los no basados en núcleos. No obstante, entre los estimadores de ambos grupos sólo se considerarán los estimadores clásico con núcleo y con conjunto difuso, los cuales se definen a través de una función de núcleo K , y una función atenuante φ (ver Reiss [14], Sección 2.4) de la siguiente manera

$$\hat{f}_K(t) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{X_i - t}{h_n}\right) \quad (1.1)$$

y

$$\hat{v}_n(t) = \frac{1}{n(b_n \int \varphi(u) du)} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{[0, \varphi(\frac{x_i - t}{b_n})]}(V_i), \quad (1.2)$$

donde $X_1, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria independiente de la variable aleatoria X con densidad f , $V_1, \dots, V_n$ son variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[0, 1]$ e independientes de $X_1, \dots, X_n$, h_n y b_n son los parámetros de suavizado de cada estimador con $h_n \rightarrow 0$ y $b_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y las funciones $K : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ y $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ satisfacen las

siguientes condiciones:

$$K(-u) = K(u), \int K(u) du = 1, \int u K(u) du = 0 \text{ y } 0 \neq \int u^2 K(u) du < \infty, \quad (1.3)$$

y

$$0 < \int \varphi(u) du < \infty, \text{ y } \int \varphi(u) du \neq 1 \text{ en general.}$$

En cuanto a los orígenes de ambos estimadores, es oportuno puntualizar que el estimador (1.1) fue introducido hace más de medio siglo y de forma independiente por Rosenblatt [15] y Parzen [13]. En cambio, el estimador (1.2) fue presentado en una fecha más reciente, menos de una década, por Fajardo, Ríos y Rodríguez [6]. Por otro lado, la existencia de una amplia referencia bibliográfica donde se discuten en profundidad las características teóricas de (1.1), justifica el hecho de presentar, en lo que sigue, sólo algunas características teóricas puntuales de (1.2) con función atenuante (c.f.a.) φ :

- Es una versión o caso particular del estimador introducido por Falk y Liese [7].
- No está basado en núcleos, ya que la función $\mathbb{I}_{[0, \varphi(x)]}(v)$ no es una función de núcleo.
- El término “conjunto difuso” fue justificado por Fajardo [4] en la Observación 2, siendo esta una consecuencia directa de la Observación 1 en Fajardo, Ríos y Rodríguez [6].

No obstante, entre las características comunes que comparten los estimadores (1.1) y (1.2) resaltan:

- En la práctica ambos estimadores dependen de parámetros de suavizados particulares y de funciones específicas, lo que fue caracterizado por Fajardo como un paralelismo entre (1.1) y (1.2). Es oportuno destacar que las siguientes funciones minimizan el error cuadrático medio integrado óptimo ($ECMI^*$) de (1.1) y (1.2), respectivamente:

$$K_E(x) = \frac{3}{4}(1-x^2)\mathbb{I}_{[-1,1]}(x), \quad \varphi(x) = \left[1 - \left(\frac{16x}{25}\right)^2\right]\mathbb{I}_{[-\frac{25}{16}, \frac{25}{16}]}(x).$$

(Núcleo de Epanechnikov) (Función Atenuante)

Para más detalles, ver Epanechnikov [3] y Fajardo [4].

- En Fajardo [4] se demostró que (1.2) presenta el mismo comportamiento asintótico de (1.1), donde $n^{-1/5}$ y $n^{-4/5}$ son los valores correspondientes para el orden de las tasas de convergencia óptimas de ambos parámetros de suavizados y ambos $ECMI^*$'s.
- El rol de la función atenuante o función de pertenencia φ (ver [6], Observación 1) fue determinante en los resultados obtenidos por Fajardo, ya que su adecuada definición permitió establecer el siguiente e importante resultado

$$ECMI^* \left[\hat{\vartheta}_n \right] \leq ECMI^* \left[\hat{f}_K \right],$$

el cual garantiza que el estimador $\hat{\vartheta}_n$ proporciona mejores estimaciones que el estimador $\hat{f}_K$, para todo núcleo K . Destacándose como una función que le permite al estimador (1.2) seleccionar puntos de la muestra con diferentes probabilidades a diferencia de los estimadores clásicos con núcleos, los cuales asignan pesos iguales a todos los puntos de la muestra.

Otra característica no deseada, enmarcada en el contexto de estas notas, es la existencia del problema frontera en (1.1) y (1.2). Los antecedentes bibliográficos señalan que Hominal y Deheuvels [9] describieron el problema frontera en (1.1) para densidades con soporte compacto. Mientras que, en un reciente trabajo, Fajardo y Harmath [5] demostraron la presencia del problema frontera en (1.2) para densidades con soporte $[0, \infty)$. Es oportuno señalar que sólo para el caso del estimador (1.1), el problema frontera han sido estudiado por muchos autores y en la literatura existe una extensa variedad de métodos desarrollados para eliminarlo. Un excelente resumen de algunos métodos muy conocidos son reseñados por Karunamuni y Alberts [12].

Estas notas comparan el desempeño del estimador frontera de f con conjunto difuso, que fue introducido recientemente por Fajardo y Harmath, con el desempeño del estimador propuesto por Karunamuni y Alberts, estimador frontera de f con núcleo localmente adaptable, en puntos cercanos a 0 en una dispersión de la vecindad de b_n . Para ello, se consideraron cuatro formas de densidades específicas, y en los puntos anteriores se realizaron extensas simulaciones para comparar el error cuadrático medio (*ECM*) local de los estimadores definidos por Karunamuni-Alberts y Fajardo-Harmath, observándose que el *ECM* local del estimador propuesto por Fajardo y Harmath es menor. La reducción anterior, muestra que el desempeño del estimador propuesto por Fajardo y Harmath supera el desempeño del estimador definido por Karunamuni y Alberts. Además, es oportuno destacar que el resultado obtenido extiende las propiedades del estimador de f con conjunto difuso, proporcionando un nuevo resultado relacionado con los problemas de estimación no paramétrica de la densidad no basado en núcleo. Cabe resaltar que todas las simulaciones se desarrollaron a través de la plataforma de programación y cálculo numérico conocida como *MATLAB*.

La anterior y particular elección se fundamentó, principalmente, en los resultados de las simulaciones obtenidas por Karunamuni y Alberts para las cuatro formas de densidades consideradas en estas notas. Tales simulaciones mostraron que el estimador de Karunamuni y Alberts funcionó bastante bien para la mayoría de las densidades consideradas, cuando fue comparado con los estimadores propuestos por Cowling y Hall [2], Jones y Foster [10], Zhang y Karunamuni [18] y su sencilla modificación que permite obtener el estimador de ajuste lineal local, Zhang, Karunamuni y Jones [19], y Hall y Park [8]. Entre otras razones que sustentaron la particular elección, se destacan los resultados de las recientes simulaciones presentadas por Fajardo y Harmath [5] para cuatro formas de densidades distintas en su mayoría a las consideradas en estas notas, pero con compartimiento análogo en 0. Tales simulaciones mostraron que el desempeño de su estimador frontera fue superior al desempeño del estimador frontera introducido por Karunamuni y Alberts [11]. Cabe destacar que los resultados de las simulaciones realizadas por Karunamuni y Alberts [11] con las cuatro formas de densidades consideradas por Fajardo y Harmath [5], mostraron que el desempeño de su estimador fue superior cuando se comparó con los estimadores definidos por Jones y Foster [10], Zhang y Karunamuni [18] y su sencilla modificación que permite obtener el estimador de ajuste lineal local, Zhang, Karunamuni y Jones [19], y Hall y Park [8]. Además, otra de las razones que justifican la elección anterior son las propiedades teóricas que comparten los estimadores propuestos por Karunamuni y Alberts [12], y Fajardo y Harmath [5]: no negatividad, “continuación frontera natural”, y en cuanto al desempeño ambos mejoran el sesgo mientras que sus varianzas son pequeñas. Finalmente, es necesario señalar que una revisión de la literatura, sobre el tema propuesto, reveló que no hay evidencia de publicaciones con respecto a comparaciones del desempeño de otros estimadores con el desempeño del estimador propuesto por Karunamuni y Alberts [12].

Las notas están organizadas de la siguiente manera. La Sección 2 incluye los estimadores propuestos por Karunamuni y Alberts [12], y Fajardo y Harmath [5]. Las Secciones 3 y 4 presentan

los análisis de los datos simulados y los datos reales, respectivamente. Las conclusiones en la Sección 5.

2 Estimadores Fronteras de la Densidad

En esta sección se presentan los estimadores propuestos por Karunamuni y Alberts [12], y Fajardo y Harmath [5], considerando sólo los detalles teóricos que permitieron su construcción como estimadores sin problema frontera. Además, se resaltan algunas observaciones únicas, así como las características particulares comunes entre tales estimadores. Es oportuno destacar la importancia de realizar un estudio teórico formal para detectar la presencia o no del problema frontera en el estimador de cualquier función, ya que no es obvio que el comportamiento de un estimador sea el mismo en los puntos fronteras e interiores.

3 Referencias cruzadas, numeración y entorno de teorema

Todos los teoremas, proposiciones, lemas, corolarios, definiciones, etc. deben tener sus propias etiquetas para hacer referencias cruzadas internas; esto se hace usando las instrucciones `\label` y `\ref`. La numeración de todos estos elementos se refiere a cada apartado del artículo, que ya ha sido establecido en el entorno teorema. Cada uno numerado se debe hacer referencia a la ecuación usando la instrucción `\eqref`.

3.1 Estimador Frontera con Núcleo Localmente Adaptable

Sea X una variable aleatoria con función de densidad f , tal que f tiene soporte $[0, \infty)$. Para una muestra aleatoria independiente $X_1, \dots, X_n$ de la variable aleatoria X y para cada $c \in [0, \infty)$, Karunamuni y Alberts inician la construcción de su estimador frontera considerando la siguiente transformación de la muestra original $g(X_1), \dots, g(X_n)$, donde $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es una función continua y monótona creciente. A partir de los datos transformados y para $r = ch_n$, con $c \geq 0$, definen el siguiente estimador adaptable

$$\hat{f}_n(r) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{r - g(X_i)}{h_n}\right) \bigg/ \int_{-1}^c K(u) du, \quad (3.1)$$

donde h_n satisface $h_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, y las condiciones sobre K se dan en (1.3). Además, calcularon las expresiones para el sesgo y la varianza del estimador (3.1), las cuales se describen en el siguiente teorema. A lo largo de estas notas, se denotará por $q^{(i)}$ la i -ésima derivada de toda función arbitraria q .

Teorema 3.1 (Lema 2.1 en [12]). *Sean f y g funciones cuyas segundas derivadas existen y son continuas en $[0, \infty)$. Además, suponga que $g(0) = 0$ y $g^{(1)}(0) = 1$. Entonces las expresiones para*

el sesgo y la varianza del estimador (3.1) en los puntos $r = c h_n$ con $c \in [0, 1]$, son las siguientes

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{f}_n(r) - f(r)] &= \frac{-h_n}{\int_{-1}^c K(u) du} \left\{ f(0) g^{(2)}(0) \int_{-1}^c (c-u) K(u) du + f^{(1)}(0) \int_{-1}^c u K(u) du \right\} \\ &+ \frac{h_n^2}{2 \int_{-1}^c K(u) du} \left\{ -f^{(2)}(0) c^2 \int_{-1}^c K(u) du + \int_{-1}^c (c-u)^2 K(u) du \left[f^{(2)}(0) \right. \right. \\ &\left. \left. - f(0) g^{(3)}(0) - 3 g^{(2)}(0) \left(f^{(1)}(0) - f(0) g^{(2)}(0) \right) \right] \right\} + o(h_n^2), \end{aligned} \quad (3.2)$$

y

$$\begin{aligned} Var [\hat{f}_n(r)] &= \frac{f(0)}{n h_n \left(\int_{-1}^c K(u) du \right)^2} \int_{-1}^c K^2(u) du + o\left(\frac{1}{n h_n}\right) \\ &= \frac{f(r)}{n h_n \left(\int_{-1}^c K(u) du \right)^2} \int_{-1}^c K^2(u) du + o\left(\frac{1}{n h_n}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Además, en su trabajo señalaron las siguientes propiedades:

- El término principal de (3.3) no está afectado por la transformación g .
- Cuando $c = 1$, $Var [\hat{f}_n(r)] = Var [\hat{f}_K(r)]$. Es decir, en el punto interior $r = h_n$ la varianza del estimador (3.1) se reduce a la varianza del estimador (1.1).

No obstante, es oportuno señalar que el estimador (3.1) presenta el problema frontera. En efecto, de la expresión (3.2) se desprende que la tasa de convergencia del sesgo del estimador (3.1) es de orden $O(h_n)$, en cada punto de la región frontera $[0, h_n)$ y en el punto interior h_n .

El siguiente paso que Karunamuni y Alberts tomaron para definir su estimador frontera, se basó en construir una función de transformación g con la siguiente propiedad

$$g^{(2)}(0) = -f^{(1)}(0) \int_{-1}^c u K(u) du / f(0) \int_{-1}^c (c-u) K(u) du, \quad (3.4)$$

siempre que $f(0) \neq 0$. Observe que tomando adecuadamente una función g con la propiedad anterior, desaparecerá el problema frontera en (3.1). No obstante, el hecho que (3.4) dependa de c permitió que Karunamuni y Alberts señalaran que tal función g dependería del punto de estimación dentro de la región frontera $[0, h_n)$, y a esa propiedad la llamaron adaptabilidad local. Además, en su trabajo modificaron la notación reemplazando g por g_c , $0 \leq c \leq 1$, para resaltar tal dependencia local. A continuación, se sintetizan las condiciones que Karunamuni y Alberts imponen a la función g_c para cada c , $0 \leq c \leq 1$:

- (i) $g_c : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, g_c es continua y monótona creciente, y existe $g_c^{(i)}$ para cada $i = 1, 2, 3$,
- (ii) $g_c(0) = 0$ y $g_c^{(1)}(0) = 1$,

(iii) la segunda derivada de g_c es

$$g_c^{(2)}(0) = -f^{(1)}(0) \int_{-1}^c u K(u) du \Big/ f(0) \int_{-1}^c (c-u) K(u) du.$$

Bajo las condiciones sobre g_c , (i), (ii) y (iii), Karunamuni y Alberts construyen e implementan la siguiente función de transformación para definir su estimador frontera

$$g_c(y) = y + \frac{d}{2} l_c y^2 + d^2 l_c^2 y^3, \quad (3.5)$$

donde

$$l_c = - \int_{-1}^c u K(u) du \Big/ \int_{-1}^c (c-u) K(u) du \quad (3.6)$$

y

$$d = f^{(1)}(0)/f(0). \quad (3.7)$$

Para la aplicación práctica de la transformación (3.5), Karunamuni y Alberts implementan la idea de Zhang, Karunamuni y Jones [19], y reemplazan (3.7) por la estimación piloto de tipo núcleo definida por

$$\hat{d} = \left(\log(f_n^*(h_1)) - \log(f_n^*(0)) \right) / h_1, \quad (3.8)$$

donde

$$f_n^*(h_1) = \frac{1}{n h_1} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{h_1 - X_i}{h_1}\right) + \frac{1}{n^2}$$

y

$$f_n^*(0) = \max \left\{ \frac{1}{n h_0} \sum_{i=1}^n K_{(0)}\left(\frac{-X_i}{h_0}\right), \frac{1}{n^2} \right\},$$

con $h_1 = o(h_n)$, h_n y K son dadas en (3.1), y $K_{(0)}$ es el llamado núcleo de orden dos con punto extremo inferior, el cual satisface las siguientes condiciones

$$\int_{-1}^0 K_{(0)}(u) du = 1, \quad \int_{-1}^0 u K_{(0)}(u) du = 0, \quad \text{y} \quad 0 < \int_{-1}^0 u^2 K_{(0)}(u) du < \infty,$$

y $h_0 = b(0) h_1$, con $b(0)$ dado por

$$b(0) = \left[\frac{\left(\int_{-1}^1 u^2 K(u) du \right)^2 \left(\int_{-1}^0 K_{(0)}^2(u) du \right)}{\left(\int_{-1}^0 u^2 K_{(0)}(u) du \right)^2 \left(\int_{-1}^1 K^2(u) du \right)} \right]^{1/5}. \quad (3.9)$$

Para cada $c \in [0, 1]$, Karunamuni y Alberts definen el estimador de la función de transformación (3.5) como

$$\hat{g}_c(y) = y + \frac{\hat{d}}{2} l_c y^2 + \hat{d}^2 l_c^2 y^3, \quad (3.10)$$

donde $\hat{d}$ viene dado por (3.8). Ellos destacaron que $\hat{g}_c$ y $\hat{d}$ dependen de n , tal dependencia no la resaltaron para simplificar la notación. Finalmente, Karunamuni y Alberts definen el estimador frontera de f con núcleo localmente adaptable de la siguiente manera

$$\tilde{f}_n(r) = \frac{1}{n h_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{r - \hat{g}_c(X_i)}{h_n}\right) \bigg/ \int_{-1}^c K(u) du, \quad (3.11)$$

donde $r \in [0, \infty)$, $0 \leq c \leq 1$, $\hat{g}_c$ viene dada por (3.10), h_n y K como en (3.1). Observe que en cada punto interior $r \in [h_n, \infty)$, $c = 1$, se tiene que $\hat{g}_1(X_i) = X_i$, $i = 1, \dots, n$. Es decir, en cada punto interior el estimador (3.11) se reduce al estimador (1.1). Como la propiedad anterior se cumple en particular para h_n y tomando en cuenta que la región frontera del estimador (3.11) es $[0, h_n)$, tal comportamiento lo interpretaron de la siguiente manera: el estimador (3.11) es una continuación frontera natural del estimador (1.1). Además, las expresiones para el sesgo y la varianza del estimador (3.11) que obtuvieron, se describen en el siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Teorema 2.1 en [12]). *Sea $\tilde{f}_n(r)$ definida por (3.11) con función de núcleo K dada en (3.1) y con parámetro de suavizado $h_n = O(n^{-1/5})$. Suponga que h_1 en (3.8) es de la forma $h_1 = O(n^{-1/4})$. Además, asuma que $K^{(1)}$ existe y es continua en $[-1, 1]$, $f(0) > 0$, y que existe $f^{(2)}$ y es continua en una vecindad de 0. Entonces para $r = c h_n$, $0 \leq c \leq 1$, se tiene que*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{f}_n(r) - f(r)] &= \frac{h_n^2}{2 \int_{-1}^c K(u) du} \left\{ f^{(2)}(0) \int_{-1}^c (u^2 - 2uc) K(u) du \right. \\ &\quad \left. + 6 \frac{(f^{(1)}(0))^2}{f(0)} (l_c^2 + l_c) \int_{-1}^c (u - c)^2 K(u) du \right\} + o(h_n^2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde l_c es dada en (3.6), y

$$\text{Var}[\tilde{f}_n(r)] = \frac{f(0)}{n h_n \left(\int_{-1}^c K(u) du \right)^2} \int_{-1}^c K^2(u) du + o\left(\frac{1}{n h_n}\right)$$

De la expresión (3.12) se desprende que el estimador (3.11) no presenta el problema frontera, ya que su sesgo tiene una tasa de convergencia de orden $O(h_n^2)$ en los puntos fronteras $r \in [0, h_n)$ y en el punto interior h_n . Los autores Karunamuni y Alberts atribuyen ese importante ajuste en el estimador (3.11) a la transformación adaptativa local (3.10), ya que transforma los datos dependiendo del punto de estimación.

3.2 Estimador Frontera con Conjunto Difuso

Sean $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria independiente de la variable aleatoria X con densidad f , y $V_1, \dots, V_n$ una muestra aleatoria independiente uniformemente distribuida en $[0, 1]$ e independiente de $X_1, \dots, X_n$. Para ambas muestras, Fajardo y Harmath [5] inician la construcción de su estimador frontera imponiendo las siguientes condiciones:

C1 La función de densidad f tiene soporte $[0, \infty)$, y es al menos dos veces continuamente diferenciable en una vecindad de $z \in [0, \infty)$.

C2 El parámetro b_n satisface: $b_n \rightarrow 0$ y $nb_n \rightarrow \infty$, cuando $n \rightarrow \infty$.

C3 La función atenuante φ es simétrica con respecto al cero, tiene soporte compacto $[-B, B]$, $B > 0$, $\varphi(u) \in [0, 1]$ y es continua en 0 con $\varphi(0) > 0$.

Seguidamente los autores establecen los siguientes resultados, en los cuales describen el comportamiento del estimador (1.2) en los puntos 0 y $x \in (0, b_n]$. Además, para simplificar la notación definen

$$\psi(u) = \frac{\varphi(u)}{\int \varphi(u) du} \quad \text{y} \quad x = s b_n, \quad 0 < s \leq 1.$$

Teorema 3.3 (Teoremas 1 y 2 en [5]). *Bajo las condiciones (C1)-(C3), se tiene que*

$$\mathbb{E} [\hat{\vartheta}_n(0) - f(0)] = \frac{b_n^2}{2} f^{(2)}(0) \int u^2 \psi(u) du + o(b_n^2).$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\hat{\vartheta}_n(x) - f(0)] &= -f(0) + f(0) \int_{-s}^B \psi(u) du + b_n f^{(1)}(0) \int_{-s}^B u \psi(u) du \\ &+ \frac{b_n^2}{2} f^{(2)}(0) \int_{-s}^B u^2 \psi(u) du + o(b_n^2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

donde $0 < s \leq 1$.

A través de los resultados anteriores, Fajardo y Harmath garantizaron que el estimador (1.2) no presenta el problema frontera en el punto interior 0, ya que su sesgo tiene una tasa de convergencia de orden $O(b_n^2)$ en 0. En cambio, con la sutil modificación introducida en (3.13) con respecto a la versión original, el lector podrá apreciar, con mayor facilidad, que el estimador (1.2) presenta el problema frontera en cada $x \in (0, b_n]$. En efecto, su sesgo tiene una tasa de convergencia de orden $O(b_n)$ en cada x .

El siguiente paso que Fajardo y Harmath tomaron para definir su estimador frontera, fue construir una función atenuante φ con la siguiente propiedad:

$$\int_{-s}^B u \varphi(u) du = 0, \quad \text{para cada } s \in (0, 1]. \quad (3.14)$$

Para tal fin, formalizan la Observación 4 introducida por Fajardo [4] reescribiéndola como el próximo teorema, con el cual controlarán adecuadamente las constantes que definen el sesgo del estimador (1.2) y justificarán una condición en el criterio que les permitirá obtener una función atenuante φ que satisface la condición (3.14).

Teorema 3.4 (Teorema 3 en [4]). *Bajo la condición (C3), se tiene que para $\mathbf{M} > 0$ existe $B' > 0$ tal que*

$$v = \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi(u) du \leq \mathbf{M}.$$

La combinación de (C3) y el Teorema 3.4, les permitió garantizar que

$$v = \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi(u) du = \int u^2 \psi(u) du \leq \mathbf{M}, \text{ con } B' > B,$$

y así redefinir ψ como

$$\psi(u) = \frac{\varphi(u)}{\int \varphi(u) du} \mathbb{I}_{[-B', B']}(u), \text{ con } B' \leq B. \quad (3.15)$$

El criterio propuesto por Fajardo y Harmath para eliminar el término con coeficiente b_n en (3.13), haciendo que $\int_{-s}^B u \varphi(u) du = 0$ para cada $s \in (0, 1]$, se basó en deducir una función atenuante φ como solución del siguiente problema variacional:

$$\text{Maximizar : } \int \varphi(u) du.$$

$$\text{Sujeto a : } \int \varphi^2(u) du = k, \int u \varphi(u) du = 0, \int (u^2 - v) \varphi(u) du = 0, k > 0, \quad (\text{PV})$$

$$\varphi(u) = 0 \text{ para } u \in (-B, B)^c, \varphi(0) > 0, \varphi(u) \in [0, 1], \text{ y } v \in (0, \mathbf{M}).$$

Es importante puntualizar que el criterio anterior generaliza el criterio propuesto por Fajardo [4], el cual implementó para obtener una función φ que minimiza el $ECMI^*$ del estimador (1.2) (ver Fajardo [4], página 307). El siguiente teorema garantiza la solución de (PV).

Teorema 3.5 (Teorema 4 en [5]). *La solución de (PV) viene dado por*

$$\varphi_k(u) = \left[1 - \left(\frac{16}{15k} \right)^2 u^2 \right] \mathbb{I}_{[-\frac{15}{16}k, \frac{15}{16}k]}(u), \quad k > 0. \quad (20)$$

En particular, para $s \in (0, 1]$ se tiene que

$$\varphi_s(u) = \left[1 - \left(\frac{16}{15s} \right)^2 u^2 \right] \mathbb{I}_{[-\frac{15}{16}s, \frac{15}{16}s]}(u). \quad (21)$$

Las siguientes observaciones fueron establecidas por Fajardo y Harmath:

- A partir de (1.2) c.f.a. φ_s y (3.13), se tiene que

$$\mathbb{E} \left[\hat{\vartheta}_n(x) - f(0) \right] = \frac{b_n^2}{2} f^{(2)}(0) \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_s(u) du + o(b_n^2), \quad (22)$$

donde $0 < s \leq 1$, $B' \leq \frac{15}{16}s$, ψ_s viene dada por (3.15) c.f.a. φ_s y φ_s viene dada por (21). Así, el estimador (1.2) no presenta el problema frontera en x cuando la función atenuante es φ_s .

- Combinando el Teorema 3.3 con el Teorema 4 en Fajardo [4], se tiene que

$$\mathbb{E} \left[\hat{\vartheta}_n(z) - f(z) \right] = \frac{b_n^2}{2} f^{(2)}(z) \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_k(u) du + o(b_n^2), \quad (23)$$

para cada $k > 1$ y $z \in \{0\} \cup (b_n, \infty)$, donde $B' \leq \frac{15}{16}k$, ψ_k viene dada por (3.15) c.f.a. φ_k , y φ_k viene dada por (20). Así, el estimador (1.2) no presenta el problema frontera en $z \in \{0\} \cup (b_n, \infty)$ cuando la función atenuante es φ_k , para cada $k > 1$.

- Denotando el núcleo Epanechnikov por K_E , y sustituyendo en (PV) k por $\frac{5}{3}$ y $\mathbf{M}$ por $\mathbf{M}_E = \int u^2 K_E(u) du$, se tiene que el estimador (1.2) c.f.a. $\varphi_{\frac{5}{3}}$ es el estimador propuesto por Fajardo [4]. Además, el resultado alcanzado en Fajardo [4] permite garantizar que la función atenuante φ_k minimiza $ECM[\hat{\vartheta}_n(z)]$, para cada $k > 1$ y cada $z \in \{0\} \cup (b_n, \infty)$.

Apoyados en (22) y (23), Fajardo y Harmath definen su estimador frontera de f con conjunto difuso de la siguiente manera

$$\tilde{\vartheta}_n(x) = \frac{1}{n a_n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{[0, \varphi_s(\frac{x_i - x}{b_n})]}(V_i), \quad (24)$$

donde $0 < s \leq 1$, $a_n = b_n \int \varphi_s(u) du$, y φ_s viene dada por (21). Ellos señalaron que, para $z \geq b_n$, $s = 1$, el estimador (24) se reduce al estimador (1.2) c.f.a. φ_1 . Así, el estimador (24) es la continuación frontera natural del estimador (1.2) c.f.a. φ_1 . Además, resaltaron que los resultados obtenidos por Fajardo [4] permiten garantizar que la función atenuante φ_s minimiza localmente a $ECM[\hat{\vartheta}_n(x)]$ para cada $s \in (0, 1]$. Por otro lado, las expresiones para el sesgo y la varianza del estimador (24) que obtuvieron, se describen en el siguiente teorema.

Teorema 3.6 (Lema 1 en [5]). *Bajo las condiciones (C1)-(C3), se tiene que*

$$\mathbb{E}[\tilde{\vartheta}_n(x) - f(0)] = \frac{b_n^2}{2} f^{(2)}(0) \int_{-B'}^{B'} u^2 \psi_s(u) du + o(b_n^2) \quad (25)$$

y

$$Var[\tilde{\vartheta}_n(x)] = \frac{f(0)}{n b_n} \left(\int \varphi_s(u) du \right)^{-1} + o\left(\frac{1}{n b_n}\right),$$

donde $0 < s \leq 1$, $0 < B' \leq \frac{15}{16}s$, ψ_s viene dada por (3.15) c.f.a. φ_s y φ_s viene dada por (21).

Finalmente señalaron que (25) garantiza que el estimador (3.11) no presenta el problema frontera, ya que su sesgo tiene una tasa de convergencia de orden $O(b_n^2)$, en los puntos fronteras $x \in (0, b_n)$ y en el punto interior b_n .

4 Análisis de Datos Simulados

En esta sección se presentan los resultados sobre los datos simulados, los cuales fueron diseñados para comparar el desempeño entre los estimadores $\tilde{f}_n(t)$ y $\tilde{\vartheta}_n(x)$ en puntos cercanos a 0 en una dispersión de la vecindad de b_n .

Cada estimador se probó usando cuatro densidades específicas, con comportamiento variado en 0. La densidad 1 trata el caso $f(0) = 0$, mientras que las densidades 2, 3 y 4 describen lo que sucede cuando $f(0) > 0$ pero $f'(0) = 0$, $f'(0) > 0$ y $f'(0) < 0$, respectivamente. Además, se implementaron los siguientes anchos de banda globales óptimos como los parámetros de suavizados de $\tilde{f}_n(t)$ y $\tilde{\vartheta}_n(x)$, respectivamente:

$$h_n = \left[\frac{\int K_E^2(u) du}{[\int u^2 K_E(u) du]^2 \int [f^{(2)}(u)]^2 du} \right]^{1/5} n^{-1/5} \quad (1)$$

y

$$b_n = \left[\frac{1}{\int \varphi_1(u) du \left[\int u^2 \psi_1(u) du \right]^2 \int [f^{(2)}(u)]^2 du} \right]^{1/5} n^{-1/5}. \quad (2)$$

Para más detalles sobre (1) y (2), ver Silverman [16], páginas 39 – 40, y Fajardo [4], respectivamente. Es oportuno destacar que la razón que motivó la implementación de (1) y (2) como los parámetros de suavizados se debió al hecho que, las comparaciones basadas en los parámetros de suavizados óptimos son más convincentes que las comparaciones basadas en los parámetros de suavizados aproximados, ya que debido a la calidad o no del método de selección del parámetro de suavizado estas podrían ser engañosas. Además, se hace una elección del parámetro de suavizado global en lugar de uno local, porque es mucho más probable que se utilicen en aplicaciones.

En todas las simulaciones, se utilizó una muestra de tamaño $n = 200$. Además, para cada densidad se calculó el sesgo (valor estimado menos el valor verdadero), la varianza y ECM de ambos estimadores en los puntos $r = ch_n$, $0 \leq c \leq 1$, y $x = sb_n$, $0 < s \leq 1$, donde $c \in \{\frac{k}{25} : k = 1, 4, 7, 9, 12\}$, $s = (h_n/b_n)c$, y los parámetros h_n y b_n son dados por (1) y (2), respectivamente. Asimismo, para estimar d se eligió, como en Karunamuni y Alberts [12], $h_1 = h_n n^{-1/20}$ y $K_{(0)}(t) = 12(1+t)(t+\frac{1}{2})\mathbb{I}_{[-1,0]}(t)$.

Todos los resultados se promediaron a través de 1000 pruebas y se muestran en las Tablas 1 a 4. Simultáneamente, basado en los resultados obtenidos, también se representan gráficamente el desempeño de cada estimador, junto con cada densidad f sobre sus respectivas regiones fronteras. Tales desempeños se muestran en las Figuras 1 a 4. Una minuciosa revisión de las Tablas 1 a 4 permite afirmar que, para todas las formas de densidades, el estimador $\hat{\vartheta}_n$ tiene un mejor desempeño que el estimador $\hat{f}_n$, ya que $ECM[\hat{\vartheta}_n(x)] \leq ECM[\hat{f}_n(x)]$ para cada $x \in (0, h_n)$. Además, se observa que ambos estimadores mejoran el sesgo mientras que sus varianzas son pequeñas. Sin embargo, la comparación del desempeño de los estimadores $\hat{f}_n$ y $\hat{\vartheta}_n$ a través del error cuadrático medio integrado ($ECMI$) no es conveniente, ya que para todas las formas de densidades se tiene que $(0, h_n] \subset (0, b_n]$. Finalmente, es oportuno enfatizar que a pesar de existir una significativa diferencia entre los ECM de ambos estimadores en cada una de las Tablas 1 a 4, esta se manifiesta en la Tabla 2 con menor magnitud cuando tales diferencias se comparan con las ECM de los estimadores de la Fig. 1. En la Fig. 1 se observa que para $\hat{f}_n$ el error cuadrático medio integrado es mayor que el de $\hat{\vartheta}_n$.

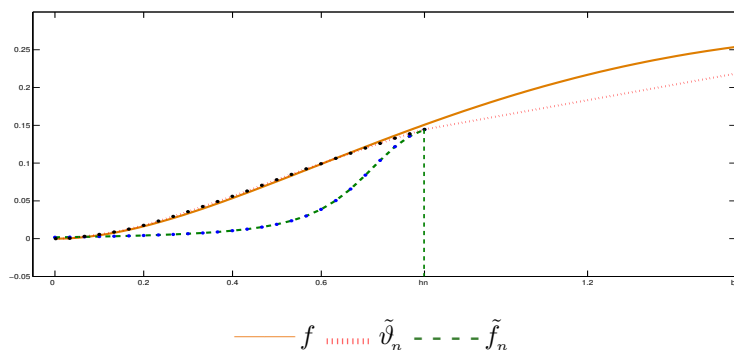


Figura 1: Estimaciones de $f(z) = \frac{1}{2} z^2 e^{-z}$, densidad 1, en la regiones fronteras $(0, h_n]$ y $(0, b_n]$, donde $v = \frac{1}{4} \mathbf{M}_E$, $n = 200$, $h_n = 0,832551$ y $b_n = 1,535404$.

Tabla 1: Sesgo, varianza y ECM de las estimaciones indicadas, a través de un promedio de 1000 pruebas en los puntos $r = c h_n$ y $x = s b_n$, $0 \leq c \leq 1$ y $0 < s \leq 1$, para $f(z) = \frac{1}{2} z^2 e^{-z}$, densidad 1, donde $v = \frac{1}{4} \mathbf{M}_E$, $n = 200$, y óptimos globales $h_n = 0,832551$ y $b_n = 1,535404$.

$\tilde{f}_n(r)$				$\tilde{\vartheta}_n(x)$			
c	Sesgo	Var	$ECM \times 10^{-5}$	s	Sesgo	Var	$ECM \times 10^{-5}$
0,0400	0,0015	0,0000	0,2258	0,0217	0,0001	0,0000	0,00031
0,1600	-0,0045	0,0000	2,0659	0,0868	0,0010	0,0000	0,09458
0,2800	-0,0167	0,0000	30,000	0,1518	0,0017	0,0000	0,30495
0,3600	-0,0268	0,0000	70,000	0,1952	0,0024	0,0000	0,59692
0,4800	-0,0430	0,0000	190,00	0,2603	0,0025	0,0000	0,61875

Tabla 2: Sesgo, varianza y ECM de las estimaciones indicadas, a través de un promedio de 1000 pruebas en los puntos $r = c h_n$ y $x = s b_n$, $0 \leq c \leq 1$ y $0 < s \leq 1$, para $f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, densidad 2, donde $v = \frac{1}{6} \mathbf{M}_E$, $n = 200$, y óptimos globales $h_n = 0,707481$ y $b_n = 1,534486$.

$\tilde{f}_n(r)$				$\tilde{\vartheta}_n(x)$			
c	Sesgo	Var	$ECM \times 10^{-4}$	s	Sesgo	Var	$ECM \times 10^{-4}$
0,0400	-0,0189	0,0000	4	0,0184	0,0049	0,0000	0,23612
0,1600	-0,0247	0,0000	6	0,0738	-0,0027	0,0000	0,07275
0,2800	-0,0287	0,0000	8	0,1291	-0,0026	0,0000	0,06517
0,3600	-0,0304	0,0000	9	0,1660	-0,0040	0,0000	0,15860
0,4800	-0,0316	0,0000	10	0,2213	-0,0089	0,0000	0,79334

5 Análisis de Datos Reales

En esta sección se pondrán a prueba los estimadores $\tilde{f}_n$ y $\tilde{\vartheta}_n$ en dos conjuntos de datos reales conocidos, con el propósito de mostrar su utilidad práctica. Sólo para la estimación de la densidad con $\tilde{\vartheta}_n$ se realizaron 1000 pruebas, donde para cada muestra fija $X_1, \dots, X_n$ se tomó una muestra independiente $V_1^{(d)}, \dots, V_n^{(d)}$, $1 \leq d \leq 1000$, distribuida uniformemente en $[0, 1]$. Por otro lado, el parámetro h_n utilizado fue implementado por otros autores en sus simulaciones, para cada conjunto de datos propuesto. No obstante, cada b_n se obtendrá combinando (2) con el valor aproximado de $\int [f''(u)]^2 du$, valor que se calculará a través de (1) para cada h_n considerado. Es oportuno señalar que, h_n y b_n se reflejarán en cada gráfica y haciendo uso de la propiedad de “continuación frontera natural” de los estimadores $\tilde{f}_n$ y $\tilde{\vartheta}_n$, se “abusará” de la notación para mostrar sólo dos curvas en la representación gráfica asociada a cada conjunto de datos, teniendo en cuenta que a la derecha de h_n y b_n las gráficas mostradas representan las gráficas de (1.1), y (1.2) c.f.a. φ_1 , respectivamente. En concreto, se identificará la estimación con núcleo y con conjunto difuso con líneas discontinuas - - - y -.-.-.-, respectivamente.

Tabla 3: Sesgo, varianza y ECM de las estimaciones indicadas, a través de un promedio de 1000 pruebas en los puntos $r = c h_n$ y $x = s b_n$, $0 \leq c \leq 1$ y $0 < s \leq 1$, para $f(z) = (z^2 + 2z + \frac{1}{2}) e^{-2z}$, densidad 3, donde $v = \frac{1}{4} \mathbf{M}_E$, $n = 200$, y óptimos globales $h_n = 0,467044$ y $b_n = 0,861329$.

$\tilde{f}_n(r)$				$\tilde{\vartheta}_n(x)$			
c	Sesgo	Var	$ECM \times 10^{-5}$	s	Sesgo	Var	$ECM \times 10^{-5}$
0,0400	0,0393	0,0000	154,2479	0,0217	0,0014	0,0000	0,2088
0,1600	0,0065	0,0000	4,1782	0,0868	0,0003	0,0000	0,0088
0,2800	-0,0159	0,0000	25,2148	0,1518	-0,0061	0,0000	3,6991
0,3600	-0,0259	0,0000	67,1897	0,1952	-0,0079	0,0000	6,2911
0,4800	-0,0351	0,0000	123,0843	0,2603	-0,0118	0,0000	13,9596

Tabla 4: Sesgo, varianza y ECM de las estimaciones indicadas, a través de un promedio de 1000 pruebas en los puntos $r = c h_n$ y $x = s b_n$, $0 \leq c \leq 1$ y $0 < s \leq 1$, para $f(z) = 2 e^{-2z}$, densidad 4, donde $v = \frac{1}{2} \mathbf{M}_E$, $n = 200$, y óptimos globales $h_n = 0,342128$ y $b_n = 0,478176$.

$\tilde{f}_n(r)$				$\tilde{\vartheta}_n(x)$			
c	Sesgo	Var	$ECM \times 10^{-5}$	s	Sesgo	Var	$ECM \times 10^{-5}$
0,0400	-0,3717	0,0000	13810	0,0286	0,0132	0,0000	17,4451
0,1600	-0,2494	0,0000	6220	0,1145	-0,0016	0,0000	0,2562
0,2800	-0,1522	0,0000	2320	0,2003	0,0005	0,0000	0,0227
0,3600	-0,1003	0,0000	1010	0,2576	0,0050	0,0000	2,4650
0,4800	-0,0409	0,0000	170	0,3434	0,0093	0,0000	8,6437

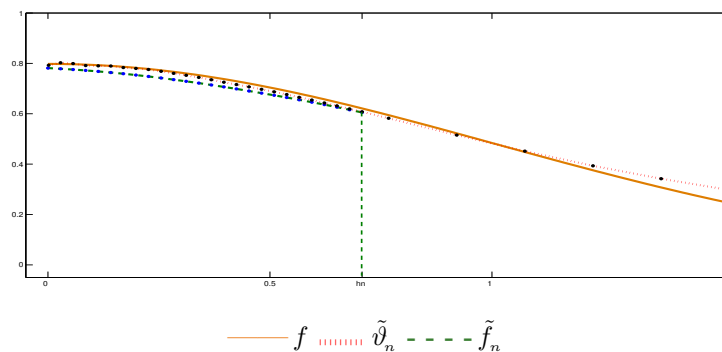


Figura 2: Estimaciones de $f(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, densidad 2, en la regiones fronteras $(0, h_n]$ y $(0, b_n]$, donde $v = \frac{1}{6} \mathbf{M}_E$, $n = 200$, $h_n = 0,707481$ y $b_n = 1,534486$.

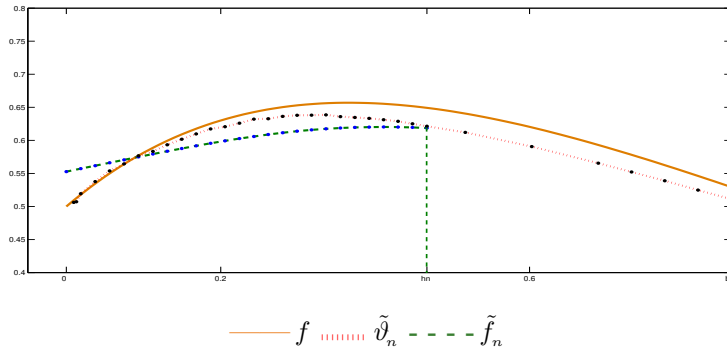


Figura 3: Estimaciones de $f(z) = (z^2 + 2z + \frac{1}{2}) e^{-2z}$, densidad 3, en la regiones fronteras $(0, h_n]$ y $(0, b_n]$, donde $v = \frac{1}{4} \mathbf{M}_E$, $n = 200$, $h_n = 0,467044$ y $b_n = 0,861329$.

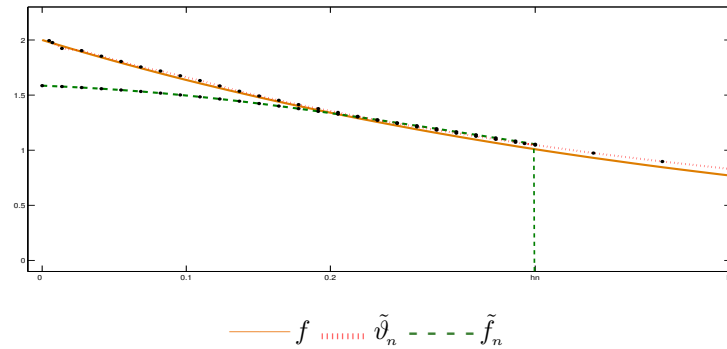


Figura 4: Estimaciones de $f(z) = 2e^{-2z}$, densidad 4, en la regiones fronteras $(0, h_n]$ y $(0, b_n]$, donde $v = \frac{1}{2} \mathbf{M}_E$, $n = 200$, $h_n = 0,342128$ y $b_n = 0,478176$.

El primer conjunto de datos reales consta de 35 mediciones correspondientes a la precipitación promedio durante el mes de diciembre en Des Moines-Iowa-EUA, desde 1961 hasta 1995. Para este conjunto de datos, Karunamuni y Alberts [12] usan $h_n = 0,4250$, obtenido a través de validación cruzada (ver Bowman y Azzalini [1]), el cual permite obtener un valor para $b_n = 0,4502$. En la Figura 5 se puede apreciar una marcada similitud entre la estimación con núcleo y con conjunto difuso en los puntos interiores y en la mayor parte de los puntos fronteras. En cambio, $\tilde{f}_n$ no reconoce que la densidad es cero para valores muy cercanos a 0 por su derecha, tal cual lo señala el histograma de los datos al pie de la gráfica. Mientras que el estimador $\tilde{\vartheta}_n$ si lo reconoce sin importarle la curvatura.

El segundo conjunto de datos reales son los famosos datos sobre suicidios que se encuentran en Silverman [16], Tabla 2.1. Estos corresponden a los períodos de duración de 86 tratamientos psiquiátricos aplicado a los pacientes utilizados como controles en un estudio sobre riesgos de suicidio, y es un ejemplo clásico de un conjunto de datos donde el estimador (1.1) falla en la región frontera. También se mostró, en el reciente trabajo de Fajardo y Harmath, que el estimador (1.2) c.f.a. φ_1 falla en la región frontera. Para este conjunto de datos, Karunamuni y Alberts [11] eligen subjetivamente $h_n = 60$, el cual permite obtener un valor para $b_n = 83,8593$. La Figura 6

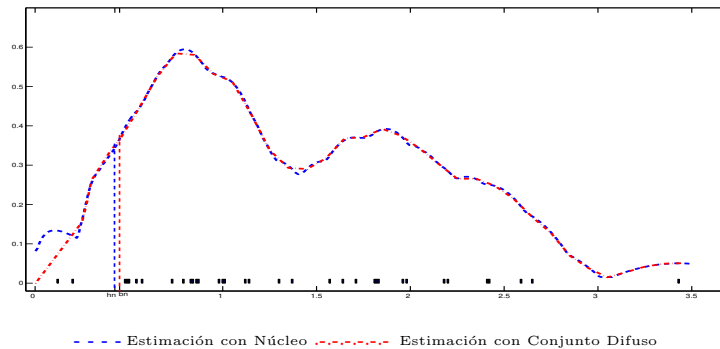


Figura 5: Estimaciones de las densidades para 35 mediciones correspondientes a la precipitación promedio en el mes de diciembre en Des Moines-Iowa-EUA desde 1961 hasta 1965, mostradas en el piso de la gráfica, donde $v = \mathbf{M}_E$, $h_n = 0,4250$, $b_n = 0,4502$ y $h_1 = h_n n^{-1/20}$.

muestra el comportamiento de las estimaciones con núcleo y con conjunto difuso. Se aprecia que el valor de la densidad en 0 es capturado de forma efectiva por el estimador $\hat{\vartheta}_n$ con una apreciable curvatura, tomando en cuenta que la densidad es 0 como lo indica el histograma al pie de la gráfica. No obstante, el estimador $\tilde{f}_n$ no reconoce el comportamiento anterior de la densidad y decide truncarla en 0 asignándole el valor 0,008.

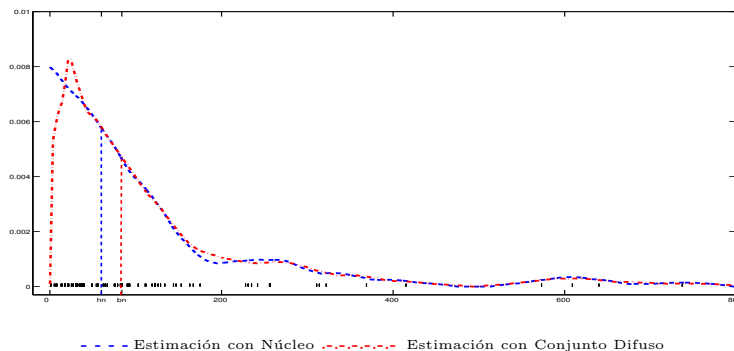


Figura 6: Estimaciones de las densidades para 86 mediciones correspondientes a los tratamientos psiquiátricos aplicado a los pacientes utilizados como controles en un estudio sobre riesgos de suicidio, mostradas en el piso de la gráfica, donde $v = \frac{1}{2} \mathbf{M}_E$, $h_n = 60$, $b_n = 83,8593$ y $h_1 = h_n n^{-1/20}$.

6 Conclusiones

Es claro que ningún estimador existente en la literatura domina al resto de los estimadores para todas las formas de densidades. Además, cada estimador tiene ciertas ventajas y funciona bien en determinados momentos. Sin embargo, para las cuatro formas de densidades consideradas en estas notas el estimador frontera de la densidad con conjunto difuso presentó un rendimiento superior con respecto al rendimiento del estimador frontera de la densidad con núcleo localmente

adaptable, en puntos cercanos a 0 en una dispersión de la vecindad del parámetro de suavizado b_n . El resultado anterior fue producto de las extensas simulaciones realizadas para comparar los errores cuadráticos medios locales de los estimadores fronteras anteriores y forma parte de una nueva contribución en el área de estimación de la función de densidad no basada en núcleo. Un resultado similar fue presentado en Fajardo y Harmath, donde bajo condiciones análogas a las anteriores el estimador frontera con conjunto difuso presentó un rendimiento superior con respecto al rendimiento del particular estimador frontera con núcleo introducido por Karunamuni y Alberts [11]. Cabe destacar que el estimador frontera con conjunto difuso y los estimadores fronteras con núcleos considerados en estas notas como en Fajardo y Harmath, presentan estructuras totalmente diferentes pero comparten propiedades comunes como: no negatividad, “continuación frontera natural”, y un desempeño robusto con respecto a diversas formas de densidades, ya que permiten importantes reducciones del sesgo mientras que sus varianzas son pequeñas. Simultáneamente, es oportuno resaltar que tales propiedades se obtienen como consecuencia de la influencia de las funciones atenuante, φ_k , y de transformación, $\hat{g}_c$, en cada estimador. Finalmente, es importante recalcar que a través del proceso puntual atenuado que describe el método de estimación de densidad con conjunto difuso, el conjunto de observaciones considerada pueden describirse en una vecindad del punto de estimación, donde las funciones indicadoras que definen al estimador de densidad con conjunto difuso deciden si la observación pertenece o no a la vecindad del punto de estimación, y las funciones atenuantes que definen a cada función indicadora se utilizan para seleccionar los puntos de la muestra con diferentes probabilidades, en contraste con los estimadores con núcleo que asignan el mismo peso a todos los puntos de la muestra.

7 Agradecimientos

El autor agradece a los árbitros anónimos por sus oportunos comentarios y útiles sugerencias, que mejoraron en gran medida la presentación de los resultados. El autor también desea agradecer al Licenciado Pedro Luis Bossio, Jefe del Departamento de Admisión y Control de Estudios del Núcleo Sucre de la Universidad de Oriente, por su apoyo con el equipo de computación, el cual fue utilizado para la transcripción de estas notas y la realización de las simulaciones presentadas.

Referencias

- [1] Bowman, A.W., Azzalini, A. *Applied smoothing techniques for data analysis: the kernel approach with S-plus illustrations*, Oxford University Press, (1997)
- [2] Cowling, A., Hall, P. *On pseudodata methods for removing boundary effects in kernel density estimation*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, **58** (1996), 551 – 563.
- [3] Epanechnikov, V. A. *Nonparametric estimates of a multivariate probability density*, Theory Prob. Appl., **14** (1969), 153 – 158.
- [4] Fajardo, J. *A criterion for the fuzzy set estimation of the density function*, Braz. J. Prob. Stat., **28**(3) (2014), 301 – 312.
- [5] Fajardo, J., Harmath, P. *Boundary estimation with the fuzzy set density estimator*, METRON, **79**(3) (2021), 285 – 302.

- [6] Fajardo, J., Ríos, R., Rodríguez, L. *Properties of convergence of a fuzzy set estimator of the density function*, Braz. J. Prob. Stat., **26**(2) (2012), 208 – 217.
- [7] Falk, M., Liese, F. *Law of thinned empirical processes with an application to fuzzy set density estimation*, Extremes, **1**(3) (1998), 323 – 349.
- [8] Hall, P., Park, B. U. *New methods for bias correction at endpoints and boundaries*, The Ann. Statist. **30** (2002), 1460 – 1479.
- [9] Hominal, P., Deheuvels, P. *Estimation non paramétrique de la densité compte-tenu d'informations sur le support*, Rev. Stat. Appl., **27**(3) (1979), 47 – 68.
- [10] Jones, M.C., Foster, P. J. *A simple nonnegative boundary correction method for kernel density estimation*, Stat. Sin., **6** (1996), 1005 – 1013.
- [11] Karunamuni, R. J., Alberts, T. *On boundary correction in kernel density estimation*, Stat. Methodol., **2** (3) (2005), 191 – 212.
- [12] Karunamuni, R. J., Alberts, T. *A locally adaptive transformation method of boundary correction in kernel density estimation*, J. Stat. Plan. Infer., **136** (2006), 2936 – 2960.
- [13] Parzen, E. *On estimation of a probability density function and mode*, Ann. Math. Statist., **33**(3) (1962), 1065 – 1076.
- [14] Reiss, R. D. *A course on point processes*, Springer Series in Statistics. New York, 1993.
- [15] Rosenblatt, M. *Remarks on some nonparametric estimates of a density function*, Anna. Math. Statist., **27**(3) (1956), 832 – 837.
- [16] Silverman, B. W. *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman and Hall. New York, 1986.
- [17] Stone, C. J. *Optimal rates of convergence for nonparametric estimators*, Ann. Statist., **8** (1980), 1348 – 1360.
- [18] Zhang, S., Karunamuni, R.J. *On kernel density estimation near endpoints*, J. Stat. Plan. Infer., **70** (1998), 301 – 316.
- [19] Zhang, S., Karunamuni, R. J., Jones, M. C. *An improved estimator of the density function at the boundary*, J. Amer. Statist. Assoc. **448** (1999), 1231 – 1241.

Divulgaciones Matemáticas Vol. 22, No. 2 (2021), pp. 66–75
<https://produccioncientificaluz.org/index.php/divulgaciones/>
DOI: <https://doi.org/10.5281/zenodo.7487520>
 (CC BY-NC-SA 4.0)

©Autor(es)
e-ISSN 2731-2437
p-ISSN 1315-2068

Divulgación de algunos teoremas de la geometría moderna entre los siglos XVII y XIX

Divulcation of some theorems of modern geometry between the XVII and XIX centuries

Eduardo Orellana (chileeduardo@gmail.com)
Departamento Matemática
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación
Santiago, Chile

Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)
ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8085-5011>
Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias
Universidad del Zulia
Maracaibo, República Bolivariana de Venezuela.

Resumen

Se establecen demostraciones alternativas y directas de algunos teoremas de la geometría moderna euclídea entre los siglos XVII y XIX como lo son el teorema de Vecten, el teorema de Dostor, teorema de Blanchet y el teorema de Viviani.

Palabras y frases clave: Geometría moderna, teorema de Vecten, teorema de Dostor, teorema de Balnchet, teorema de Viviani, demostraciones.

Abstract

Alternative and direct proofs of some theorems of euclidean modern geometry between the XVII and XIX centuries are established such as Vecten theorem, the Dostor theorem, of Blanchet and the theorem Viviani.

Key words and phrases: Modern geometry, Vecten's theorem, Dostor's theorem, Balnchet's theorem, Viviani's theorem, proofs.

1 Introducción

La demostración de los teoremas que se tratan bajo razonamiento clásico (deductivo), como lo son los teoremas de Vecten, Dostor, Blanchet y Viviani en el espacio euclídeo simple Ω , fue obtenida por Legendre en [7], Dostor en [4] y Viviani en [12]. En este trabajo, se muestran cuatro resultados: las pruebas de cuatro teoremas de los siglos XVII al XIX y es bajo razonamientos clásicos, en esencia, bajo los teoremas de Ceva (ver [2]) y Thales, de congruencia y semejanza de triángulos.

Recibido 20/09/2021. Revisado 18/10/2022. Aceptado 21/03/2022.
MSC (2010): Primary 51-XX; Secondary 51-03.
Autor de correspondencia: Eduardo Orellana

Se presenta la divulgación de dichas pruebas, dadas también por generaciones actuales como lo hace Orellana en [10], con figuras ilustrativas y de forma detallada para hacer más comprensible las ideas que se presenten.

2 Preliminares

A continuación se presenta una lista de la simbología que se usa en el trabajo:

Ω	plano euclídeo
$A_i, B_i, C_i, \dots$	puntos en Ω , para $i \in \mathbb{N}$
$\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$	significa que $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ con i, j, k distintos entre si.
$\overleftrightarrow{AE}$	recta que pasa por los puntos $A, E \in \Omega$.
$\mathcal{L}$	recta en Ω
$\overline{AB}$	segmento entre los puntos $A, B \in \Omega$.
$\overrightarrow{AB}$	rayo que inicia en A y pasa por B .
$\triangle ABC$	triángulo de vértices $A, B, C \in \Omega$
$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza entre los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$
$X \cong Y$	congruencia entre las estructuras X e Y (segmentos, ángulos, triángulos)
$\square ABCD$	cuadrado de vértices $A, B, C, D \in \Omega$.
$\angle ABC$	ángulo de vértice en B , con lados $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$.
$m(X)$	medida de la estructura X (ángulo, segmento).
$a(\triangle ABC)$	área del triángulo $\triangle ABC$.

Ahora se presentan los teoremas que servirán de pilares fundamentales para el desarrollo de las demostraciones de los teoremas de Vecten, Dostor, Blanchet y Viviani.

Teorema 2.1 (Teorema de Thales). (ver [8]). *Si dos rectas cualesquiera son cortadas por rectas paralelas, los segmentos que se determinan en una de las rectas son proporcionales a los segmentos correspondientes en la otra recta.*

Teorema 2.2 (Primer Criterio de Semejanza). *Dos triángulos son semejantes si tienen dos pares de ángulos respectivamente iguales.*

Teorema 2.3 (Teorema de Pitágora). (ver [1]). *El cuadrado de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.*

Teorema 2.4 (Teorema de Ceva). (ver [6]). *Dado un triángulo cualquiera $\triangle A_1A_2A_3$, si E_k es un punto interior del segmento $\overline{A_iA_j}$, para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces los segmentos $\overline{E_iA_i}$ (para $i = 1, 2, 3$) son concurrentes si, y solo si, se cumple que*

$$\frac{m(\overline{A_1E_3})}{m(\overline{E_3A_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_2E_1})}{m(\overline{E_1A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3E_2})}{m(\overline{E_2A_1})} = 1$$

Teorema 2.5 (Teorema de Euclides). (ver [1]). *Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$ con ángulo recto en el vértice B y sea $\overline{BD}$ la altura desde B al lado $\overline{AC}$, entonces*

$$[m(BD)]^2 = m(AD) \cdot m(DC)$$

Teorema 2.6 (ver [5]). *Dado el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ y M_i el punto medio del segmento $\overline{A_jA_k}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces se cumple que:*

1. *El triángulo $\triangle M_iM_jA_k$ es congruente con el triángulo $\triangle M_1M_2M_3$, para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$.*
2. *El segmento $m(\overline{A_iA_j}) = 2m(\overline{M_iM_j})$, para $\{i, j\} \subset \{1, 2, 3\}$, es decir, $m(A_iM_k) = m(M_iM_j)$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$*

3 Algunos teoremas de la geometría euclídea entre los siglos XVII y XIX

En esta sección se establecen demostraciones de los teoremas de Vecten, Dostor, Blanchet y Viviani.

Teorema 3.1 (Teorema del punto de Vecten). *Sea el triángulo $\triangle A_1A_2A_3 \subset \Omega$ y $\square A_iA_jB_kC_k$ el cuadrado construido sobre los lados $\overline{A_iA_j}$, para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ respectivamente. Además, sea el punto P_k centro del cuadrado $\square A_iA_jB_kC_k$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Entonces, si A_i es opuesto a P_i , los segmentos $\overline{A_iP_i}$ son concurrentes en un único punto v llamado *punto de Vecten*, para $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Demostración. Considérese el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ y el punto medio M_3 del lado $\overline{A_1A_2}$. Como P_3 es el centro del cuadrado $\square A_1A_2B_3C_3$, se tiene que $\overline{M_3P_3}$ cumple que $\overline{A_1A_2} \perp \overline{M_3P_3}$ de manera que $m(\overline{A_1M_3}) = m(\overline{A_2M_3}) = m(\overline{P_3M_3})$, y así $\triangle A_1M_3P_3 \cong \triangle A_2M_3P_3$ por el criterio de congruencia (L.A.L.) (ver Figura 1-(a)). En efecto: $\angle P_3M_3A_1 = \frac{\pi}{2} = \angle P_3M_3A_2$, pues $\overline{A_1A_2} \perp \overline{M_3P_3}$; el segmento $\overline{P_3M_3}$ es lado común de los triángulos $\triangle P_3M_3A_1$ y $\triangle P_3M_3A_2$; y $m(\overline{M_3A_1}) = m(\overline{M_3A_2})$ pues M_3 es el punto medio del lado $\overline{A_1A_2}$.

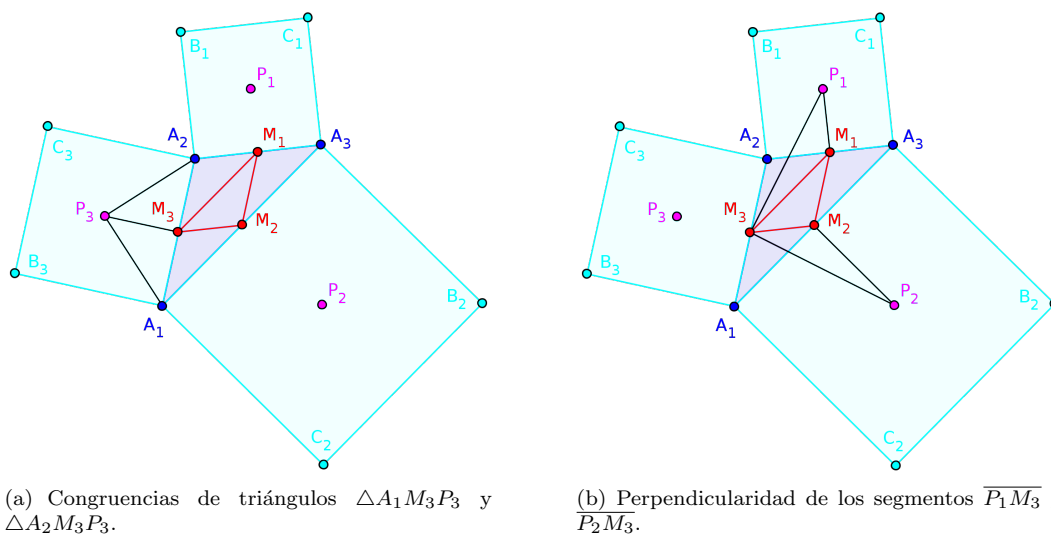


Figura 1: Teorema de Vecten

Notemos que el segmento $\overline{A_2M_1} \cong \overline{M_3M_2}$, por el Teorema 2.6 (ver Figura 1-(b)). Como $\overline{A_2M_1} \cong \overline{P_1M_1}$, entonces $\overline{M_3M_2} \cong \overline{P_1M_1}$. Por un razonamiento similar se obtiene que $\overline{M_3M_1} \cong \overline{A_1M_2} \cong \overline{M_2P_2}$. Como $\triangle A_2M_1M_3 \cong \triangle A_1M_3M_2$, se tiene que $\angle A_2M_1M_3 \cong \angle M_3M_2A_1$, por el Teorema 2.6, y como $\angle A_2M_1P_1 = 90^\circ = \angle A_1M_2P_2$, entonces $\angle M_3M_1P_1 \cong \angle M_3M_2P_2$. Así se tiene que $\triangle M_3P_1M_1 \cong \triangle M_3M_2P_2$, y por tanto los segmentos $\overline{M_3P_1}$ y $\overline{M_3P_2}$ son congruentes.

Luego, dado que $\angle M_3M_2A_2 + \angle M_2P_2M_3 + \angle P_2M_3M_2 = 90^\circ$, $\angle M_1M_3M_2 \cong \angle M_3M_2A_1$ y $\angle M_2P_2M_3 \cong \angle P_1M_3M_1$, entonces $\angle M_1M_3P_1 + \angle M_2M_3M_1 + \angle P_2M_3M_2 = 90^\circ$. De manera que el $\angle P_2M_3P_1$ es recto en M_3 ya que $\overline{P_1M_3} \perp \overline{P_2M_3}$. Pero como el $\angle P_1M_3P_2$ y el $\angle A_1M_3P_3$ son rectos, y el $\angle P_2M_3A_1$ es adyacente a ambos ángulos, entonces $\angle A_1M_3P_1 \cong \angle P_3M_3P_2$. Luego, tomando en cuenta que $m(\widehat{A_1M_3}) = m(\widehat{P_1M_3})$ se tiene que $\overline{A_1M_3} \cong \overline{P_1M_3}$, de manera que $\triangle A_1M_3P_1 \cong \triangle P_1M_3P_2$ por el criterio de congruencia (L.A.L.) (ver (a) en Figura 2). De esto último se obtiene que $\overline{P_2P_3} \cong \overline{A_1P_1}$.

Por otro lado, como la suma de los ángulos internos del triángulo $\triangle AP_1P_2$ suman 180° , y tomando en cuenta que: $\angle M_3P_1A \cong \angle M_3P_2A$; $\angle AP_1P_2 = \angle M_3P_1P_2 - \angle M_3P_1A$; y $\angle P_1P_2A = \angle M_3P_2A + \angle M_3P_2P_1$ se obtiene que $\overline{P_2P_3} \perp \overline{A_1P_1}$ (ver (a) en Figura 2).

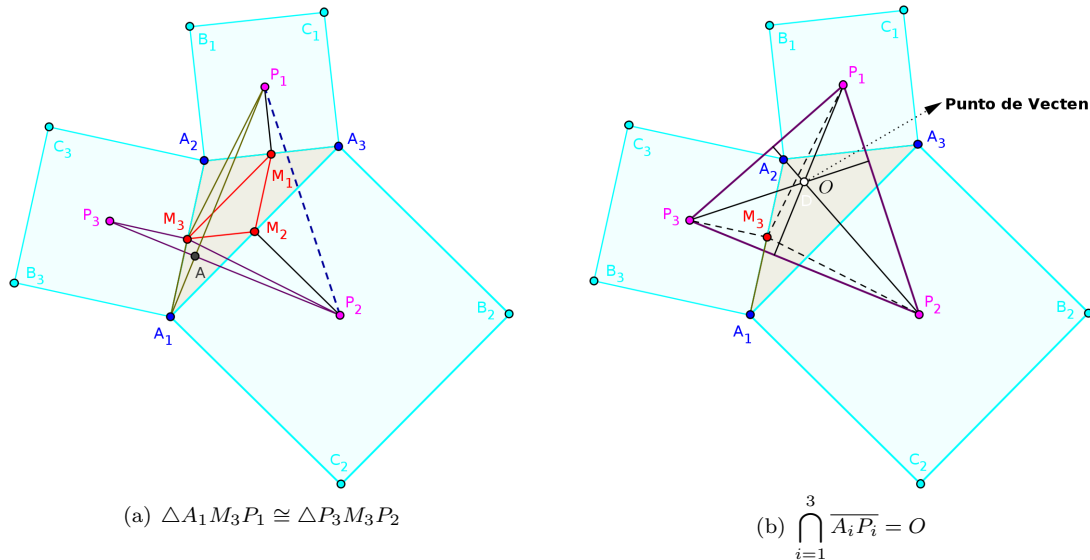


Figura 2: Representación del Teorema del punto de Vecten.

En forma análoga se obtiene que $\overline{P_1P_2} \cong \overline{A_3P_3}$ y $\overline{P_3P_1} \cong \overline{A_2P_2}$ de donde se deduce que $\overline{P_1P_2} \perp \overline{A_3P_3}$ y $\overline{P_3P_1} \perp \overline{A_2P_2}$, respectivamente. Por tanto, en el triángulo $\triangle P_1P_2P_3$ se tiene que $\overline{A_iP_i}$ contiene a la altura del lado $\overline{P_jP_k}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Luego, como el ortocentro O del triángulo $\triangle P_1P_2P_3$ está dado por la intersección de sus alturas, se tiene que

$$\{O\} = \overline{A_1P_1} \cap \overline{A_2P_2} \cap \overline{A_3P_3}$$

y por tanto los segmentos $\overline{A_iP_i}$ son concurrentes en el punto $V = O$ (ver (b) en Figura 2), para $i \in \{1, 2, 3\}$. $\square$

Teorema 3.2 (Teorema de Dostor). *En todo triángulo rectángulo al trazar una perpendicular desde el punto medio de uno de sus catetos sobre la hipotenusa, entonces la medida del otro cateto*

al cuadrado es la diferencia de las medidas de los segmentos al cuadrado determinados por el pie de la perpendicular trazada sobre la hipotenusa.

Demostración. Sea el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ rectángulo en el vértice A_2 . Considérense el punto medio M del cateto $\overline{A_2A_3}$; la perpendicular $\overline{MD_1}$ trazada desde M sobre la hipotenusa $\overline{A_1A_3}$; y la perpendicular $\overline{A_2D_2}$ trazada desde el vértice A_2 sobre la hipotenusa $\overline{A_1A_3}$, entonces

$$\overline{MD_1} \cap \overline{A_1A_3} = \{D_1\} \quad \text{y} \quad \overline{A_2D_2} \cap \overline{A_1A_3} = \{D_2\}$$

$$m(\overline{A_2M}) = m(\overline{MA_3}) \quad (3.1)$$

de manera que los puntos A_1, D_2, D_1, A_3 colineales (ver Figura 3) y

$$m(\overline{D_2A_3}) = m(\overline{D_2D_1}) + m(\overline{D_1A_3}) \quad (3.2)$$

De igual forma, tomando el segmento $\overline{A_1A_3}$, se tiene

$$m(\overline{A_1D_1}) + m(\overline{D_1A_3}) = m(\overline{A_1A_3}) = m(\overline{A_1D_2}) + m(\overline{D_2A_3}). \quad (3.3)$$

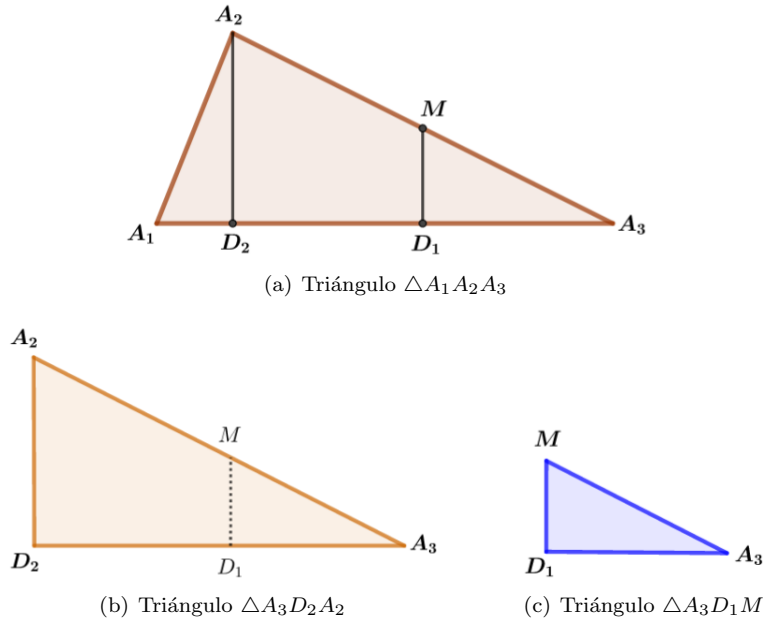


Figura 3: Representación para el Teorema de Dostor.

Las perpendiculares $\overline{A_2D_2}$ y $\overline{MD_1}$ determinan respectivamente los triángulos $\triangle D_2A_3A_2$ y $\triangle D_1A_3M$, y así se tiene que: $\angle A_2D_2A_3 \cong \angle MD_1A_3$ pues ambos son ángulos rectos en D_2 y D_1 , respectivamente; $\angle A_1A_3A_2 \cong \angle A_1A_3A_2$ por ser ángulo común; y $\angle D_2A_2A_3 \cong \angle D_1MA_3$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Así, por el Teorema 2.2 se tiene que $\triangle D_2A_3A_2 \sim \triangle D_1A_3M$, y por tanto

$$\frac{m(\overline{D_1A_3})}{m(\overline{A_3M})} = \frac{m(\overline{D_2A_3})}{m(\overline{A_2A_3})}. \quad (3.4)$$

Tomando en cuenta la ecuación (3.1) se tiene que

$$m(\overline{A_2A_3}) = 2m(\overline{A_2M}) = 2m(\overline{MA_3}),$$

y sustituyendo en la ecuación (3.4) se obtiene

$$m(\overline{D_2A_3}) = 2m(\overline{D_1A_3}) \quad (3.5)$$

De manera que, usando la ecuación (3.2), se tiene

$$m(\overline{D_1A_3}) = m(\overline{D_2D_1}) \quad (3.6)$$

y por tanto $\overline{D_1A_3} \cong \overline{D_2D_1}$.

También, tomando en cuenta las ecuaciones (3.2) y (3.3), se tiene que

$$m(\overline{A_1D_1}) = m(\overline{A_1D_2}) + m(\overline{D_1A_3})$$

y entonces

$$m(\overline{A_1D_2}) = m(\overline{A_1D_1}) - m(\overline{D_2D_1}) \quad (3.7)$$

Ahora, aplicando el Teorema 2.5 al triángulo $\triangle A_1A_2A_3$, se tiene que

$$[m(\overline{A_2D_2})]^2 = m(\overline{A_1D_2}) \cdot m(\overline{D_2A_3})$$

y usando las ecuaciones (3.5), (3.6) y (3.7) se obtiene que

$$[m(\overline{A_2D_2})]^2 = [m(\overline{A_1D_1}) - m(\overline{D_2D_1})] \cdot 2[m(\overline{D_2D_1})]$$

y así

$$[m(\overline{A_2D_2})]^2 = [2m(\overline{A_1D_1}) \cdot m(\overline{D_2D_1})] - 2[m(\overline{D_2D_1})]^2. \quad (3.8)$$

Por otro lado, aplicando el Teorema 2.3 al triángulo $\triangle A_1D_2A_2$ y usando la ecuación (3.7), se tiene que

$$[m(\overline{A_1A_2})]^2 = [m(\overline{A_2D_2})]^2 + [m(\overline{A_1D_1}) - m(\overline{D_2D_1})]^2,$$

Desarrollando cuadrados y tomando en cuenta la ecuación (3.8) se tiene que

$$[m(\overline{A_1A_2})]^2 = [m(\overline{A_1D_1})]^2 - [m(\overline{D_2D_1})]^2$$

y por la ecuación (3.6) se finalmente que

$$[m(\overline{A_1A_2})]^2 = [m(\overline{A_1D_1})]^2 - [m(\overline{A_3D_1})]^2$$

□

Observación 3.1. Podemos probar directamente también para la última parte por congruencia de triángulos, osea que $\triangle A_1A_2D_2 \cong \triangle A_2A_2A_3$ y esto llevará a que

$$\frac{m(\overline{A_1A_2})}{[m(\overline{A_1D_1}) - m(\overline{D_2D_1})]} = \frac{[m(\overline{A_1D_1}) + m(\overline{D_1A_3})]}{m(\overline{A_1A_2})}.$$

Teorema 3.3 (Teorema de Blanchet). *Sean el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ y $D_k \in \overline{A_iA_j}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Si algún $\overline{A_iD_i}$ es altura del lado $\overline{A_jA_k}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ y $P \in \overline{A_iD_i}$ para $i = 1, 2, 3$, entonces $\angle D_jD_iA_i \cong \angle D_kD_iA_i$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$*

Demostración. Sin pérdida de generalidad sea $\overline{A_3D_3}$ la altura del lado $\overline{A_1A_2}$ en el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$. Además, sean D_1 y D_2 puntos sobre los lados respectivos A_2A_3 y A_1A_3 tales que,

$$\overline{A_1A_2} \cap \overline{A_3D_3} = \{D_3\} \quad \overline{A_2A_3} \cap \overline{A_1D_1} = \{D_1\} \quad \overline{A_1A_3} \cap \overline{A_2D_2} = \{D_2\}$$

Como se tiene que $P \in \overline{A_iD_i}$ para $i = 1, 2, 3$ entonces

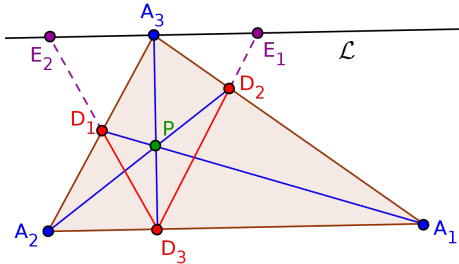
$$\overline{A_1D_2} \cap \overline{A_2D_3} \cap \overline{A_3D_1} = \{P\}$$

Trazando la recta $\mathcal{L}$ paralela al lado $\overline{A_1A_2}$ del $\triangle A_1A_2A_3$, tal que

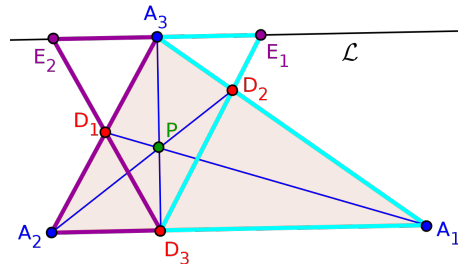
$$\mathcal{L} \cap \triangle A_1A_2A_3 = \{A_3\}.$$

y prolongando los segmentos $\overline{D_3D_2}$ y $\overline{D_3D_1}$ hasta los puntos E_1 y E_2 , respectivamente (ver Figura 4), se tiene que

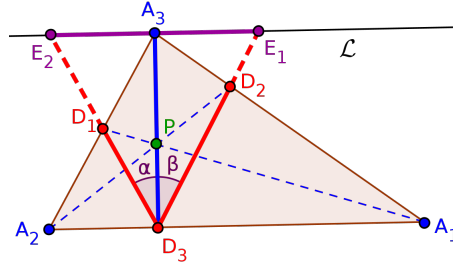
$$\overrightarrow{D_3D_2} \cap \mathcal{L} = \{E_1\} \quad \text{y} \quad \overrightarrow{D_3D_1} \cap \mathcal{L} = \{E_2\}.$$



(a) Segmentos, rectas y extensiones



(b) Triángulos relevantes



(c) Ángulos iguales

Figura 4: Representación para el Teorema de Blanchet.

Dado que $\overline{D_3A_3}$ es la altura de $\overline{A_1A_2}$ entonces $\angle PD_3A_2$ es recto, y como $\overline{A_1A_2} \parallel \overrightarrow{E_1E_2}$ entonces $\angle PA_3E_2$ es recto. Se busca probar que el triángulo $\triangle E_1D_3E_2$ con base $\overline{E_1E_2}$ es isósceles.

Nótese que se cumple lo siguiente: $\angle D_1 A_3 E_2 \cong \angle D_1 A_2 D_3$ y $\angle D_1 E_2 A_3 \cong \angle D_1 D_3 A_2$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas; y $\angle E_2 D_1 A_3 \cong \angle D_3 D_1 A_2$ por ser ángulos opuestos por el vértice. De manera que, por el Teorema 2.2, se tiene que $\triangle D_1 D_3 A_2 \sim \triangle D_1 E_2 A_3$ y por tanto

$$\frac{m(\overline{D_1 A_2})}{m(\overline{A_2 D_3})} = \frac{m(\overline{D_1 A_3})}{m(\overline{A_3 E_2})} \quad (3.9)$$

Por otra parte se tiene que: $\angle D_2 A_3 E_1 \cong \angle D_2 A_1 D_3$ y $\angle D_2 E_1 A_3 \cong \angle D_2 D_3 A_1$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas; y $\angle A_3 D_2 E_1 \cong \angle D_3 D_2 A_1$ por ser ángulos opuestos por el vértice. De manera que $\triangle D_2 A_3 E_1 \sim \triangle D_2 A_1 D_3$ y por tanto

$$\frac{m(\overline{D_3 A_1})}{m(\overline{A_1 D_2})} = \frac{m(\overline{E_1 A_3})}{m(\overline{A_3 D_2})} \quad (3.10)$$

Ahora, como las cevianas $\overline{A_1 D_1}$, $\overline{A_2 D_2}$, $\overline{A_3 D_3}$ en el triángulo $\triangle A_1 A_2 A_3$ son concurrentes en el punto P (ver [2]), y aplicando el Teorema 2.4, se tiene que

$$\frac{m(\overline{A_1 D_3})}{m(\overline{D_3 A_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_2 D_1})}{m(\overline{D_1 A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 D_2})}{m(\overline{D_2 A_1})} = 1. \quad (3.11)$$

Al multiplicar las ecuaciones (3.9) y (3.10) se tiene que,

$$\frac{m(\overline{D_1 A_2})}{m(\overline{A_2 D_3})} \cdot \frac{m(\overline{D_3 A_1})}{m(\overline{A_1 D_2})} = \frac{m(\overline{D_1 A_3})}{m(\overline{A_3 E_2})} \cdot \frac{m(\overline{E_1 A_3})}{m(\overline{A_3 D_2})}$$

y por tanto

$$\frac{m(\overline{D_1 A_2})}{m(\overline{A_2 D_3})} \cdot \frac{m(\overline{D_3 A_1})}{m(\overline{A_1 D_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 E_2})}{m(\overline{D_1 A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 D_2})}{m(\overline{E_1 A_3})} = 1 \quad (3.12)$$

Ahora, aplicando transitividad en las ecuaciones (3.11) y (3.12), se obtiene que

$$\frac{m(\overline{A_1 D_3})}{m(\overline{D_3 A_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_2 D_1})}{m(\overline{D_1 A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 D_2})}{m(\overline{D_2 A_1})} = \frac{m(\overline{D_1 A_2})}{m(\overline{A_2 D_3})} \cdot \frac{m(\overline{D_3 A_1})}{m(\overline{A_1 D_2})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 E_2})}{m(\overline{D_1 A_3})} \cdot \frac{m(\overline{A_3 D_2})}{m(\overline{E_1 A_3})}$$

de manera que cancelando términos se obtiene que

$$\frac{m(\overline{A_3 E_2})}{m(\overline{E_1 A_3})} = 1$$

Así, aplicando el Teorema 2.3 a los triángulos $\triangle E_2 A_3 D_3$ y $\triangle E_1 A_3 D_3$ se obtiene que $\overline{E_2 D_3} \cong \overline{E_1 D_3}$ lo que implica que $\alpha = \angle D_1 D_3 A_3 \cong \angle D_2 D_3 A_3 = \beta$. $\square$

Teorema 3.4 (Teorema de Viviani). *Sean un triángulo equilátero $\triangle A_1 A_2 A_3$ y P es un punto interior cualquiera al triángulo. Si $D_k \in \overline{A_i A_j}$ tal que $\overline{PD_k} \perp \overline{A_i A_j}$ para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces la medida de la altura del triángulo es igual a*

$$m(\overline{PD_1}) + m(\overline{PD_2}) + m(\overline{PD_3}).$$

Demostración. Sea el triángulo $\triangle A_1A_2A_3$ equilátero de lados con medidas

$$m(\overline{A_1A_2}) = m(\overline{A_2A_3}) = m(\overline{A_1A_3}) = k \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \quad (3.13)$$

Como P es un punto interior al triángulo y $\overline{PD_k} \perp \overline{A_iA_j}$ ($D_k \in \overline{A_iA_j}$ tal que) para $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, entonces se obtiene que: $\overline{PD_2}$ es altura del $\triangle A_1PA_3$; $\overline{PD_3}$ es altura del $\triangle A_1PA_2$; y $\overline{PD_1}$ es altura del $\triangle A_2PA_3$.

Calculando el área de los triángulos determinados se tiene que

$$\begin{aligned} a(\triangle A_1A_3) &= \frac{k \cdot m(\overline{PD_2})}{2} & a(\triangle A_1PA_2) &= \frac{k \cdot m(\overline{PD_3})}{2} \\ a(\triangle A_2PA_3) &= \frac{k \cdot m(\overline{PD_1})}{2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Sin pérdida de generalidad, tómese la altura $\overline{A_3D}$ sobre el lado $\overline{A_1A_2}$ del $\triangle A_1A_2A_3$, así se obtiene que

$$a(\triangle A_1A_2A_3) = \frac{m(\overline{A_1A_2}) \cdot m(\overline{A_3D})}{2} = \frac{k \cdot m(\overline{A_3D})}{2}.$$

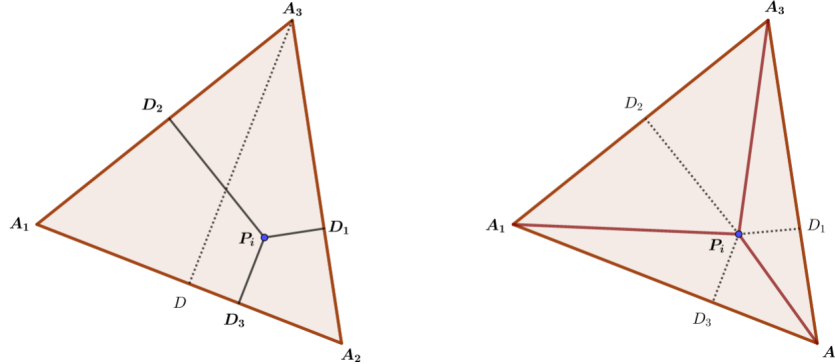


Figura 5: Representación para el Teorema de Viviani.

Luego, en términos de áreas equivalentes ocurre que (ver Figura 5),

$$a(\triangle A_1A_2A_3) = a(\triangle A_1PA_3) + a(\triangle A_1PA_2) + a(\triangle A_2PA_3).$$

y por tanto

$$\frac{k \cdot m(\overline{PD_2})}{2} + \frac{k \cdot m(\overline{PD_3})}{2} + \frac{k \cdot m(\overline{PD_1})}{2} = \frac{k \cdot m(\overline{A_3D})}{2}.$$

lo que implica que

$$\frac{k}{2} [m(\overline{PD_2}) + m(\overline{PD_3}) + m(\overline{PD_1})] = \frac{k}{2} \cdot m(\overline{A_3D}),$$

teniendo así que

$$m(\overline{PD_2}) + m(\overline{PD_3}) + m(\overline{PD_1}) = m(\overline{A_3D})$$

□

Observación 3.2. En concreto, podemos decir que la suma de las distancias desde un punto cualquiera del interior del triángulo equilátero hasta los lados de este, no depende del punto P . Esto es válido generalizando para polígonos regulares de $n \in \mathbb{N}$, ($n > 2$) lados. Considerando la altura del $\triangle A_1 A_2 A_3$ con medida $m(\overline{A_3 D})$ igual a $\frac{m(\overline{A_1 A_2})}{2} \sqrt{3}$, se tendrá un resultado análogo.

Referencias

- [1] Bárcenas, Diómedes; Vivenes, José; *Introducción a la Geometría plana*, Colección: Ciencias Básicas, Serie: Matemática, Consejo de Publicaciones de la Universidad de los Andes 1ª Edición, Mérida-República Bolivariana de Venezuela, 1998. ISBN 980-11-0165-2.
- [2] Ceva, G.; *De lineis rectis se invicem secantibus*, statica constructio, Mantua, 1678.
- [3] Dostor, G.; *Propriétés nouvelles de la tangente et de la normale aux courbes du second degré*. (160-171), París, 1878.
- [4] Dostor, G.; *Recherche des systèmes de deux polygones réguliers étoilés, inscrits dans le même cercle, qui sont tels que la surface de l'un soit double de la surface de l'autre*. (407-409), París, 1877.
- [5] Durán, Darío; *La Geometría Euclidiana*, Ediciones Astro Data S.A., Maracaibo-Venezuela, 2003, ISBN 980-12-0331-5.
- [6] Ivorra, Carlos; *Geometría*, Libro digital, Disponible en: <https://www.uv.es/ivorra/Libros/G.pdf>
- [7] Legendre, A. M.; *Éléments de Géométrie*, avec additions et modifications par M. A. Blanchet, deuxième édition, París, 1849.
- [8] López, Nayit; *Fundamentos de Geometría métrica plana*, 2ª Edición, EDILUZ, Maracaibo-Venezuela, 2000. ISBN 980-232-307-1.
- [9] Levy, S.; *Introducción a la geometría moderna*, México, 1983.
- [10] Orellana, E.; *Teoremas de la geometría moderna: Inclusión a través de la geometría dinámica*, Libro de Actas. ISBN 978-84-945722-3-4, (T-399), CIBEM VIII, Universidad Complutense, Madrid, 2017.
- [11] Ramírez, A.; *Trigonometría*, Notas, CIMAT, Ciudad de México, 2011.
- [12] Viviani, V.; *De maximis et minimis geometrica*. Praeceptorem Galilaem Lynceum, Florenti, 1659.

Problemas y Soluciones

Problems and Solutions

Editor: Tobías Rosas Soto (tjrosas@gmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8085-5011>

Departamento de Matemática, Facultad Experimental de Ciencias,
Universidad del Zulia, Maracaibo,
República Bolivariana de Venezuela.

Los problemas apropiados para esta sección son aquellos que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado sin conocimientos especializados. Problemas abiertos conocidos no son aceptables. Se prefieren problemas originales e interesantes. Las soluciones y los problemas propuestos deben dirigirse al editor por correo electrónico, en español o inglés, a la dirección arriba indicada (preferiblemente como un archivo fuente en $\text{\LaTeX}$). Las propuestas deben acompañarse de la solución, o al menos de información suficiente que haga razonable pensar que una solución puede ser hallada.

Appropriate problems for this section are those which may be tackled by undergraduate math students without specialized knowledge. Known open problems are not suitable. Original and interesting problems are preferred. Problem proposals and solutions should be e-mailed to the editor, in Spanish or English, to the address given above (preferably as a $\text{\LaTeX}$ source file). Proposals should be accompanied by a solution or, at least, enough information on why a solution is likely.

1 Problemas propuestos

Los dos problemas propuestos a continuación se plantearon en la XXXV Olimpiada Mexicana de Matemáticas 2021 celebrada virtualmente.

148. Determina todos los conjuntos no vacíos $C_1, C_2, C_3, \dots$, tales que cada uno de ellos tiene un número finito de elementos y todos sus elementos son enteros positivos, con la siguiente propiedad: Para cualesquiera enteros positivos m y n , la cantidad de enteros positivos en el conjunto C_m más la cantidad de enteros positivos en C_n es igual a la suma de los elementos en el conjunto C_{m+n} .

Nota: Al denotar con $|C_k|$ la cantidad de elementos de C_k y con S_k la suma de los elementos de C_k , la condición del problema es que para m, n enteros positivos se cumple

$$|C_n| + |C_m| = S_{m+n}$$

149. Sea $\triangle ABC$ un triángulo acutángulo escaleno con $\angle BAC = 60^\circ$ y ortocentro H . Sea ω_b la circunferencia que pasa por H y es tangente a $\overline{AB}$ en B , y ω_c la circunferencia que pasa por H y es tangente a $\overline{AC}$ en C .

- Pruebe que ω_b y ω_c solamente tienen a H como punto común.
- Pruebe que la recta que pasa por H y el ortocentro O de $\triangle ABC$ es tangente común a ω_b y ω_c .

2 Soluciones

Recordamos que no se han recibido soluciones a los problemas 24–25, 28, 44, 54, 79, 84–91, 94–100, 108–113, 116, 118–123, 126, 128–129, 133–143 y 145–147. Invitamos a los lectores a enviarnos sus soluciones para esos problemas.

Guía para los Autores

Divulgaciones Matemáticas es una revista arbitrada que considera para su publicación trabajos inéditos de investigación, en todas las áreas de la Matemática y sus aplicaciones, historia o enseñanza. Contribuciones adecuadas trabajos de investigación, de divulgación e históricos y de enseñanza matemática. Se presta especial atención a los temas tratados en la reunión anual e itinerante de las **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** celebradas en Venezuela. Además, contempla una sección de problemas y soluciones, la cual presenta problemas que puedan ser abordados por un estudiante de matemática no graduado, sin conocimientos especializados.

El primer requisito para que un artículo sea publicable es su corrección matemática. En segundo lugar, el estilo expositivo debe ser atractivo y lo más fluido y organizado que sea posible. En los trabajos de investigación se tomarán en cuenta la relevancia y originalidad de los resultados obtenidos. El tercer requisito para que el cuerpo editorial de la revista acepte un artículo, para someterlo a evaluación y posible publicación, es que el mismo debe estar elaborado en LaTeX, utilizando una plantilla predefinida por la revista, se le pide a los autores respetar las instrucciones internas indicadas en la plantilla mencionada. El archivo fuente (.tex) y una versión en formato .dvi, .pdf o .ps (imprimible) debe enviarse por correo electrónico a divulgaciones@demat-fecluz.org. Si el artículo contiene figuras, éstas deben adjuntarse como archivos separados en formatos .png o .jpg.

Los lenguajes aceptados por la revista son español e inglés. Al someter un artículo, el autor debe remitir una carta en la que se haga constar que el artículo que se está sometiendo no ha sido publicado o sometido a otra revista de forma total o parcial. Dicha carta debe contener los siguientes datos: Nombre completo del autor o autores, título del artículo, firma del autor que somete el artículo (autor de correspondencia), y declaración expresa de conformidad de los demás autores (cuando exista más de un autor).

El autor, o autores, en el mensaje de sometimiento del manuscrito deben indicar la sección de la revista en la que sugiera debe ser incluido su trabajo, a saber: artículo de investigación, artículo de divulgación e histórico, artículo de enseñanza matemática. Además, el autor debe suministrar los datos (nombre, correo, institución donde laboran) de tres especialistas en el área del trabajo sometido. Los artículos deben organizarse en las siguientes secciones: Identificación, Resumen, Abstract, Introducción, Desarrollo, Agradecimiento (opcional), y Referencias bibliográficas (usar el estilo ejemplificado en la plantilla).

Identificación. Esta debe incluir: Título completo del trabajo en castellano e inglés; Título corto para el trabajo; Nombre completo y dirección completa del autor o autores; Afiliación institucional; Dirección electrónica; Dos clasificaciones, una primaria y otra secundaria, de cinco caracteres de la AMS (MSC 2010).

Resumen: Texto de no más de doscientas palabras que simplifique en esencia lo que se presenta a lo largo del trabajo. Debe tomar en cuenta aspectos como: Objetivos del trabajo; Metodología utilizada; Resultado. A continuación del resumen se deben incluir de tres a seis palabras o frases claves.

Abstract: Una traducción al idioma inglés de todo lo expuesto en el resumen.

Cabe resaltar que **LA REVISTA SOLO PROCESARÁ LOS ARTÍCULOS QUE CUMPLAN CON TODOS LOS REQUISITOS ANTES EXPUESTOS.**

Guide for Authors

Divulgaciones Matemáticas is a refereed journal, which considers for publication, unpublished research papers in all branches of mathematics and its applications, history or teaching. Suitable contributions can be research papers, historical and/or teaching papers and bibliographical reviews. Special attention is paid to those topics covered by the annual itinerant meeting **Jornadas Venezolanas de Matemáticas** held in Venezuela. In addition, the journal contemplates a section of problems and solutions, which contains problems that can be addressed by undergraduate students of mathematics without expertise.

Mathematical correctness is the first requirement for an article to be published. In second place, the exposition style should be attractive and most fluid and organized as possible. For research works the relevance and originality of the results will be taken into account. The third requirement to agree on the evaluation and possible publication of an article is its preparation in LaTeX using a predefined template by the journal. We ask the authors to respect the internal instructions given in the provided template. The source file (.tex) and a version .dvi, .pdf or .ps (printable) should be sent by email to divulgaciones@demat-fecluz.org. If the article contains figures, these should be attached as separate files in .jpg or .png formats.

The languages accepted by the journal are Spanish and English. When submitting an article, the author must include a separate letter stating that the article has not been published or submitted to another journal in total or partial way. The letter should contain the following information: Full name of author or authors, article title, signature of the author who submits the article (corresponding author), and a declaration of conformity of the other authors.

When submitting a manuscript, the author or authors, should suggest the section of the journal in which the work should be included, namely research papers, expository and historical papers, mathematics teaching papers. In addition, the author must provide the data (name, email, institution where they work) of three specialists in the area of the submitted work. Articles should be organized into the following sections: Identification, Abstract, Resumen, Introduction, Development, Acknowledgment (optional), and References (use the style exemplified in the template).

Identification. This should include: Full title in Spanish and English; short title for the article; Full name and full address of author or authors; Institutional affiliation; Electronic address; Two classifications, one primary and one secondary, of five characters of the AMS (MSC 2010).

Abstract: Text of not more than two hundred words simplify essentially what is presented throughout the work. You should take into account aspects such as work objectives; Methodology used; Result. Following the abstract should include three to six key words or phrases.

Resumen: A Spanish language translation of the above in the abstract.

Should be noted that **THE JOURNAL WILL ONLY PROCESS ARTICLES THAT MEET ALL THE REQUIREMENTS MENTIONED ABOVE.**

DIVULGACIONES MATEMÁTICAS, Vol. 22, No. 2
Se terminó de editar en Diciembre del 2022
en el Departamento de Matemática (DEMAT)
Maracaibo - Venezuela.

La Universidad del Zulia

AUTORIDADES

Judith Aular de Durán
Rectora

Clotilde Navarro
Vicerrectora Académica

Marlene Primera Galué
Vicerrectora Administrativa

Ixora Gómez
Secretaria de LUZ

Facultad Experimental de Ciencias

José Ortega
Decano(E)

Tobías Rosas Soto
Director del Departamento de Matemática



Universidad
del Zulia

Divulgaciones Matemáticas

Vol. 22, No. 1, 2021



Facultad
Experimental
de Ciencias

Contenido (Contents):

Artículos de Investigación (Research papers)

Análisis de conflicto en sistemas dinámicos de eventos discretos usando redes de Petri.

Analysis of conflict on discrete event dynamic systems using Petri nets.

Marcia Caicedo, Guelvis Mata, Bladismir Ruiz

1-9

Estructura algebraica de los autómatas finitos y lenguajes.

Algebraic structure of finite automata and languages.

Fernando Ortiz, Luz Solé

10-22

Qualitative study of a mathematical model for the transmission of COVID-19.

Estudio cualitativo de un modelo matemático para la transmisión del COVID-19.

Yuri Alcántara, Sandy Sánchez, Antonio Ruiz

23-33

Matriz de adyacencia de Ramsey del grafo $K_R(G,H)$ con componentes h-buenas y las relaciones geométricas entre lados y vértices de los grafos G , H y $K_R(G,H)$.

Ramsey adjacency matrix of the graph $K_R(G,H)$ with h-good components and the geometric relationship that exists between sides and vertices of the graphs G , H and $K_R(G,H)$.

José Elgueroa, Felicia Villarroel, Henry Ramírez, Tobías Rosas

34-47

Notas sobre el desempeño de los estimadores fronteras de densidad con núcleo localmente adaptable y con conjunto difuso.

Notes on the performance of the boundary locally adaptive kernel and boundary fuzzy set density estimators.

Jesús Fajardo

48-65

Artículos de Divulgación e Históricos (Expository and Historical papers)

Divulgación de algunos teoremas de la geometría moderna entre los siglos XVII y XIX.

Divuligation of some theorems of modern geometry between the XVII and XIX centuries.

Eduardo Orellana, Tobías Rosas

66-75

Problemas y Soluciones (Problems and Solutions)

Tobías Rosas Soto. (Editor)

76-77