

Omnia Año 31, No. 1 (enero-junio, 2025) pp. 405 - 416
Universidad del Zulia. e-ISSN: 2477-9474
Depósito legal ppi201502ZU4664

Una experiencia de aula desde álgebra lineal con GeoGebra 3D

Luis Manuel Barrios Soto y Mercedes Delgado González***

Resumen

El uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra 3D permiten la aplicación de estrategias pedagógicas para la comprensión de definiciones y procesos de construcción geométrica en la asignatura de álgebra lineal, por lo que este trabajo se sustenta en aportes como Van Hiele (1999), Gardner (2015), Torres, et al (2021), Campo, et al (2021), entre otros. Metodológicamente tiene un enfoque cualitativo, aplicando la observación activa en el desarrollo de una clase para el análisis de las experiencias o vivencias de los estudiantes. Entre los resultados se encontró que el uso de GeoGebra 3D facilita entender el comportamiento de los elementos geométricos que son necesarios para la representación de vectores y rectas en el espacio. Se concluye que la experiencia de los educandos fue satisfactoria, puesto a la facilidad de representación geométrica que tiene dicho asistente tecnológico, brindando mayor campo de visualización por las perspectivas, pero también, se notó mayor entendimiento de los procesos algebraicos inmersos en el uso de vectores y la ecuación vectorial de la recta en \mathbb{R}^3 .

Palabras clave: Tecnología, álgebra lineal, GeoGebra.

* Magister en matemáticas, mención docencia. Doctorando en Ciencias Humanas de la Universidad del Zulia y docente de la Institución Universitaria de Barranquilla, Colombia. lmbs19@hotmail.com

** Doctora en Ciencias Humanas y profesora titular de la Universidad del Zulia, Facultad de Humanidades y Educación. Coordinadora de la Maestría en Matemática, mención docencia. merdelgon@gmail.com

A classroom experience from linear algebra with GeoGebra 3D

Abstract

The use of technological tools such as GeoGebra 3D allows the application of pedagogical strategies for the understanding of definitions and geometric construction processes in the subject of linear algebra, so this work is based on contributions such as Van Hiele (1999), Gardner (2015), Torres, et al (2021), Campo, et al (2021), among others. Methodologically, it has a qualitative approach, applying active observation in the development of a class for the analysis of the experiences of the students. Among the results, it was found that the use of GeoGebra 3D facilitates the understanding of the behavior of the geometric elements that are necessary for the representation of vectors and lines in space. It is concluded that the experience of the students was satisfactory, due to the ease of geometric representation that this technological assistant has, providing a greater field of visualization by the perspectives, but also, a greater understanding of the algebraic processes involved in the use of vectors and the vector equation of the straight line in \mathbb{R}^3 was noted.

Keywords: Technology, linear algebra, GeoGebra.

Introducción

Los procesos de enseñanza de la geometría en los diferentes niveles escolares son importantes debido al vínculo que crea esta área con el entorno y su composición, es decir, gracias al desarrollo del pensamiento geométrico se puede entender las propiedades de las figuras, sus características, diferencias y semejanzas con otras, lo que Van Hiele (1999), en su teoría, establece como la forma en que el alumno puede resolver problemas de nivel geométrico con el fin de desarrollar habilidades iniciando con el reconocimiento de las figuras (2D y 3D), pasando por el descubrimiento de las propiedades geométricas de los objetos y llegando a niveles a aplicación y demostración de conjecturas o teoremas.

Hoy, existen diferentes estrategias de enseñanza para la geometría, que van desde la exploración del entorno, la construcción de figuras con materiales escolares, e incluso, el uso de la tecnología como herramienta visual e interactiva. En atención a este planteamiento, Torres, et al (2021), postula que

la aplicación de las tecnologías de la información y la comunicación permiten mejorar los procesos de enseñanza e incorporar nuevas prácticas en los estilos de enseñanza de docentes.

Uno de los recursos que más utilizan los maestros en cualquier nivel académico es GeoGebra, puesto que permite realizar de manera dinámica procesos de construcción geométrica, teniendo en cuenta aspectos también como álgebra, la estadística y el cálculo, además, “el asistente matemático GeoGebra ofrece múltiples ventajas desde el punto de vista de la Matemática en las funciones que implementa, de su portabilidad y como software libre” (Rodríguez, et al. 2021:165).

Entendiendo la gran versatilidad que tiene el uso de los recursos tecnológicos como GeoGebra, asignaturas como álgebra lineal, impartida desde el nivel de educación superior, se pueden ver beneficiadas por las múltiples estrategias pedagógicas empleadas por docentes para la compresión de definiciones, conceptos o procedimientos que tenga un vínculo entre el álgebra y la geometría. Por lo que según Campo, et al (2021:536), establecen que:

“El empleo de un sistema de geometría dinámico, como GeoGebra, proporciona un conjunto de herramientas que facilitan dichos procesos del pensar matemáticamente, en este caso concreto la identificación de patrones y la formulación y justificación de conjeturas para un tópico específico dentro de un curso típico de álgebra lineal”.

Ante todo este contexto teórico, se han evidenciado ciertas dificultades en los estudiantes universitarios de una institución de Colombia en relación con la comprensión de la definición de ecuación vectorial de la recta desde la asignatura de álgebra lineal, lo cual puede deberse a varios factores, como la complejidad del concepto, la falta de ejemplos claros y la desconexión con situaciones de la vida real, o la poca importancia que algunos docentes han otorgado al hecho de utilizar estrategias didácticas y recursos tecnológicos para mejorar la comprensión de los estudiantes en esta área. Por lo anterior, este trabajo tiene como propósito aplicar el recurso tecnológico GeoGebra 3D para estudiar y comprender la definición de ecuación vectorial de la recta desde la asignatura de álgebra lineal.

Pensamiento geométrico

Basado inicialmente en el concepto del Ministerios de Educación Nacional (1998), el pensamiento geométrico está relacionado a la capacidad de construir modelos mentales de los objetos que existen en el espacio, enten-

diendo sus características, las transformaciones y las propiedades. Pasado ahora por la definición de Gardner (2015), el pensamiento geométrico está relacionado con la inteligencia espacial, donde la manipulación de los elementos del espacio hace que el individuo desarrolle tendencias a profesiones tales como ingeniería, aviación, diseño, artes, entre otras.

El desarrollo del pensamiento mencionado, se potencializa desde la escuela en la asignatura de geometría, donde investigadores como Vega y Ramírez (2019), establecen que esto permite el manejo de las figuras y los materiales concretos para la construcción las mismas, además, Rodríguez, et al (2023), comentan que las actividades relacionadas con la cotidianidad ayudan a que los alumnos pueden entender los objetos que se encuentran en el entorno e interactuar con ellos, desarrollando así el pensamiento geométrico.

Metodología

Este trabajo tiene un enfoque cualitativo, cuyo propósito es, según Ñaupas, et al (2018), el que permite estudiar experiencias relacionadas con la vida, teniendo en cuenta las características, aspectos y fenómenos que se presenten de forma social y cultural. Además, según Sambrano (2020), el enfoque cualitativo facilita comprender la realidad misma del sujeto de investigación y poder interpretar la información sin la necesidad de cuantificar.

Asimismo, se utilizó la observación como técnica de recolección de información, la cual según Hernández-Sampieri y Mendoza (2018), tiene las características de explorar y describir aspectos de un contexto, sujeto o fenómeno, de la misma forma, comprender los procedimientos o situaciones, experiencias o circunstancias donde en un lapso de tiempo se desarrollen actividades.

Este trabajo de investigación se llevó a cabo con un grupo de 31 estudiantes del cuatrimestre 2024-2 del programa Mantenimiento Eléctrico Industrial de la Institución Universitaria de Barranquilla. La experiencia observada se desarrolló en el módulo de álgebra lineal, específicamente en el tema relacionado con la ecuación vectorial de la recta en \mathbb{R}^3 , donde se aplicaron conceptos como: vector director, ecuación paramétrica y simétrica de la recta, representación gráfica manual y construcción gráfica en GeoGebra 3D.

Actividad en el aula

Como se ha mencionado anteriormente, el tema desarrollado durante

la clase de álgebra lineal fue la ecuación vectorial de la recta, donde se tomó la definición de Poole (2011), y en la figura 1 se muestra dicha definición.

Figura 1. Definición de la ecuación vectorial de la recta

Definición

La forma vectorial de la ecuación de una recta ℓ en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 es

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{d}$$

donde \mathbf{p} es un punto específico sobre ℓ y $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ es un vector director para ℓ .

Las ecuaciones que corresponden a los componentes de la forma vectorial de la ecuación se llaman *ecuaciones paramétricas* de ℓ .

Fuente: Poole (2011:36).

Los ejercicios analizados en clases consistían en encontrar la ecuación vectorial de la recta en \mathbb{R}^3 , conociendo primero un punto de la recta y un vector director, de la misma forma, dicha ecuación vectorial también debía reescribirse en su forma paramétrica y simétrica. Además, se debía evaluar el parámetro t de la ecuación para encontrar otro punto de la recta en el espacio y poder presentarla geométricamente de forma manual y compararla posteriormente con la gráfica en GeoGebra 3D.

Hubo ejercicios donde al conocer sólo dos puntos de la recta en el espacio, se debía calcular los demás aspectos como: vector director y las diferentes formas algebraicas de la ecuación de la recta. Los resultados observados durante el desarrollo de la clase fueron muy interesantes debido a que las perspectivas de la gráfica manual creaban la noción de aspectos que visualmente eran incorrectos y que en GeoGebra 3D se podían ver con mayor determinismo y dinamismo.

Resultados

Al dar las explicaciones respectivas sobre el proceso para encontrar algebraicamente la ecuación vectorial de la recta en el espacio, conociendo un punto de dicha recta y un vector director, los alumnos tenían ciertas dudas relacionadas con el vínculo existente entre las ecuaciones y la representación de esta en \mathbb{R}^3 de forma manual. Para ello, el docente explicó la importancia de dar un valor arbitrario al parámetro t mencionado en la definición de la Figura 1.

Por lo anterior, se detalló el paso a paso de la construcción manual de la gráfica, esto se hizo como primera instancia para mostrar solo una perspectiva de la recta y el vector director, lo que más adelante se contrastó con la gráfica en GeoGebra 3D. En la figura 2 se logra ver el proceso algebraico y la gráfica realizada por el maestro en el tablero del salón después de encontrar la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta, también, al evaluar el parámetro t , dándole un valor arbitrario igual a menos uno (-1).

Se hace necesario mencionar que antes de tomar el valor de menos uno (-1) para el parámetro, se había tomado inicialmente un valor de 3, propuesto por un alumno del grupo, pero este tuvo que ser cambiado por un número menor debido a que el resultado de la componente z del punto era igual a diecisiete (17) y, resultaba muy extenso poder graficarlo de forma manual debido al espacio limitado del tablero. Este aspecto resultó interesante para el grupo de alumnos, puesto que implicaba un ejemplo preciso para tomar valores arbitrarios que por inspección diera un punto diferente a P que fuera más cómodo graficar.

Figura 2. Proceso algebraico y gráfica manual del primer ejercicio explicado por el docente.

Encontrar la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta ℓ que pasa por P y tiene vector director v .

A) $P = (1, -2, 5)$ $v = (1, -1, 3, 4)$

$$(x_1, z_1) + (1, -2, 5) + t(1, -1, 3, 4) \quad \text{EJ. 4}$$

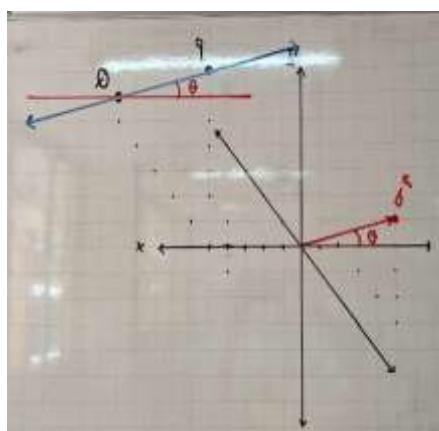
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ z = -2 + 3t \\ y = 5 + 4t \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1+3t=2 \\ 5+4t=17 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} t = 1 \\ t = -1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (1+1, -2+1, 5+1) \\ (1-1, -2-1, 5-1) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} (2, -1, 6) \\ (0, -3, 4) \end{matrix}$$

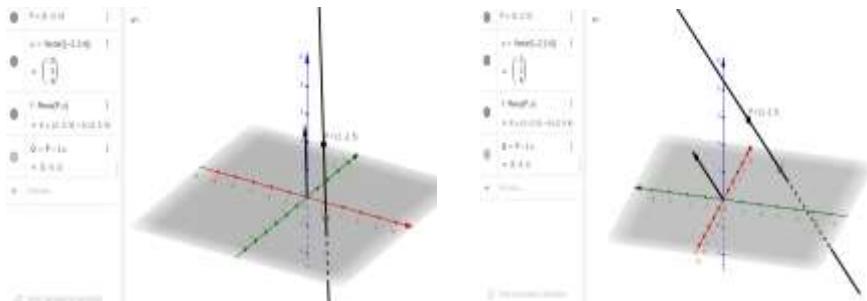


Fuente: Autores (2024).

Una vez el docente terminó de realizar la gráfica manual, mostró la construcción geométrica de forma virtual utilizando GeoGebra 3D, donde se observó algo muy interesante: la gráfica arrojada inicialmente por el programa no era similar a la realizada en el tablero (ver figura 3). Esto despertó el interés en los alumnos, puesto que en ese momento suponían que había un

error de parte del docente, en otras palabras, se interpretó que, para los estudiantes, el espacio era rígido, inamovible o estático, ya que, en clases anteriores, se había usado una sola perspectiva de \mathbb{R}^3 .

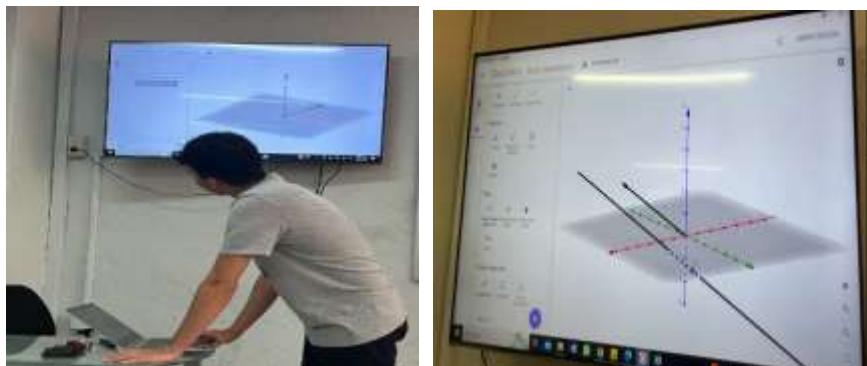
Figura 3. Grafica virtual en GeoGebra 3D del primer ejercicio explicado en clase.



Fuente: Autores (2024).

Por lo anterior, se hizo necesario mostrar a los alumnos que esta gráfica podía ser rotada (como muestra la gráfica en la figura 3) para llegar a una perspectiva similar a la realizada de forma manual. Lo que no sólo motivó a los alumnos a realizar otros ejercicios en clase, sino a graficarlos como forma de verificación gráfica desde la tecnología. En la figura 4, se puede ver a un estudiante manipulando las herramientas de GeoGebra 3D para comprobar que los resultados algebraicos de su ejercicio eran correctos.

Figura 4. Estudiante verificando sus resultados de forma virtual en clase y gráfica final obtenida por él mismo

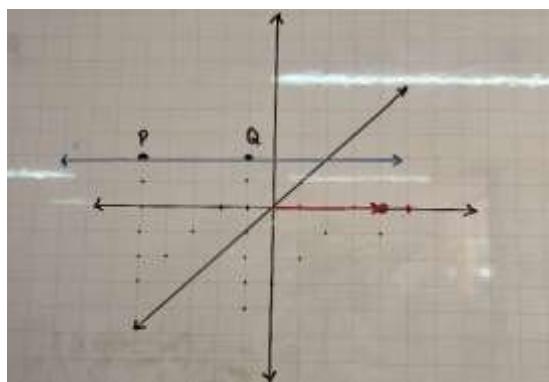


Fuente: Autores (2024).

La descripción realizada hasta el momento de la clase es acorde a lo planteado por autores como Flores, et al (2021), cuando establecen que uso de las TIC pueden generar aprendizaje significado y que las herramientas virtuales permiten observar un impacto positivo en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Adicionalmente a esto, el uso de GeoGebra ayuda a “dinamizar los procesos y hacer de la matemática y la geometría un portal al conocimiento y la adquisición de competencias para la vida, la cual está llena de formas y movimientos” (Flores, et al. 2021: 22). Además, según Mora (2020:79), “el rol del docente es facilitar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las nuevas generaciones con la implementación de las Tic y herramientas que permitan adquirir nuevas formas de generar conocimiento y transmitir el mismo hacia los estudiantes”.

Una vez que terminó la primera parte de la clase, donde los alumnos aprendieron a encontrar y establecer la ecuación vectorial de la recta teniendo como datos un punto y un vector director, el docente explicó un ejercicio tomado exclusivamente para escuchar las concepciones de los alumnos sobre la gráfica resultante. En este caso, el profesor explicó cómo calcular la ecuación vectorial, paramétrica y simétrica de la recta cuando los datos dados son solamente dos puntos de la recta en el espacio. Para este ejercicio particular, se quiere describir puntualmente las conclusiones a las que llegaron los alumnos a ver la gráfica manual realizada en el tablero. La figura 5 detalla la construcción de la recta en el espacio bajo la misma perspectiva de la gráfica que se muestra en la figura 2, pero representando una recta diferente.

Figura 5. Gráfica realizada por el docente en el tablero durante la clase.



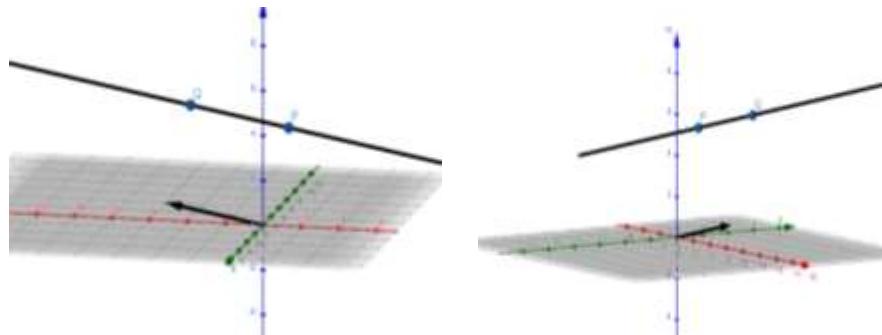
Fuente: Autores (2024).

Como se puede apreciar en la figura 5, la recta pasa por dos puntos $P = (-2,3,5)$ y $Q = (3,4,6)$, que al ser ubicados en \mathbb{R}^3 se obtiene la recta trazada con color azul. Cabe resaltar que el elemento trazado en rojo, es el vector director encontrado al restar las componentes del punto final (Q) con el punto inicial (P). En consecuencia, se les preguntó a los estudiantes sobre lo que observaban en dicha gráfica y algunas respuestas fueron:

- 1) La recta es horizontal.
- 2) La recta es paralela al eje x.
- 3) El vector es paralelo al eje x y a la recta misma.
- 4) El vector está encima del eje x.

La intención de este ejercicio era exactamente hacer pensar a los alumnos que estas conclusiones eran posibles, pero una vez el docente realizó la gráfica con la ayuda de GeoGebra 3D, estas conclusiones cambiaron de manera inmediata. Como se puede detallar, en la figura 5 se muestra el mismo ejercicio de la figura 4, pero con dos perspectivas diferentes de forma virtual.

Figura 5. Representación virtual del ejercicio bajo dos perspectivas diferentes



Fuente: Autores (2024).

Es interesante como se puede desarrollar el pensamiento geométrico al realizar actividades que permiten manipular el espacio por medios tecnológicos y no quedarse con una sola perspectiva geométrica. Los alumnos desarrollaron varios ejercicios más en la clase y realizaron verificaciones gráficas de forma manual y virtual, esto facilitó mayor comprensión del tema y creó un vínculo entre los procesos algebraicos y la representación geométrica,

haciendo que la matemática en general cobrara sentido y despertando la motivación en el grupo de estudiantes. Esta segunda experiencia en clase, es acorde a lo planteado por Cenas, et al (2021:388):

“Las TIC representan a las herramientas de trabajo que hacen posible la integración de diferentes medios con las correspondientes ventajas de cada uno, favoreciendo la trasmisión de más información en menos tiempo, de forma variada y amena y permitiendo el establecimiento de un ambiente de aprendizaje favorable y significativo donde se siente motivado el estudiante gracias a su carácter de interactividad”.

En la figura 6 se muestra otro alumno realizando su gráfica en GeoGebra 3D y comparando así el resultado de su proceso manual, además, mostró a sus compañeros cómo utilizar las herramientas del programa para reforzar los procesos de construcción, haciendo que estos pudieran no solo comparar sus resultados con el de él, sino también el querer manejar estas herramientas desde su computadora personal.

Figura 6. Alumno utilizando GeoGebra 3D para representar geométricamente sus resultados.



Fuente: Autores (2024).

Conclusiones

El uso de las tecnologías en las escuela y universidades son necesarias para reforzar la comprensión de los temas matemáticos, en especial,

aquellos que requieran ser visualizados. Por lo anterior, el uso de herramientas como GeoGebra 3D, permite que los estudiantes adquieran destrezas de representación gráfica y que pueden desarrollar criterios propios con el fin de comparar y entender los elementos geométricos que se presentan.

El uso de GeoGebra 3D brinda mayor perspectiva en relación con el espacio y los elementos en él, por lo que es importante que el maestro domine las herramientas de este asistente matemático con el fin de mostrar a sus estudiantes las ventajas que tiene el manejo de la tecnología con fines académicos, por lo que Cenas, et al (2021), concluyen que estas actividades despiertan el interés y la motivación por el trabajo.

La preparación y planificación de la clase es fundamental para llegar a los objetivos trazados, esto permite que el docente tenga claro lo que quiere lograr con su grupo, por lo que, en este caso particular, se quería mostrar otras formas de representación geométrica, no solo la manual. Asimismo, es necesario que el docente también se encuentre capacitado para desarrollar clases con la tecnología adecuada y enseñar a sus alumnos a utilizarla de forma eficiente y con fines específicos.

Por último, toda herramienta o recurso, concreto o virtual, es necesario en el desarrollo del pensamiento geométrico, puesto que ayuda a comprender que las figuras pueden observarse bajo diferentes perspectivas, entendiendo así las características y propiedades que estas tienen. Además, el desarrollo de la clase se hace más estimulante cuando se emplean asistentes tecnológicos como GeoGebra.

Referencias bibliográficas

- Cenas, Fernando., Gamboa, Leydiana., Blaz, Fanny y Castro, Wilmer (2021). Geogebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 5 (18), 382-390. <https://doi.org/10.33996/revista-horizontes.v5i18.181>.
- Flores, Francisco., Vásquez, Claudio y González, Felipe (2021). El uso de las TIC en la enseñanza de conceptos geométricos en la educación básica. *RIDE Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 12 (23), 1-30. <https://doi.org/10.23913/ride.v12i23.1024>.
- Gardner, Howard (2015). **Inteligencias Múltiples. La teoría en la práctica.** PAIDÓS Educación. Barcelona, España.

Hernández-Sampieri, Roberto y Mendoza, Christian (2018). **Metodología de la investigación. Las rutas cuantitativas, cualitativas y mixtas.** McGrawHill. México.

Ministerio de Educación Nacional MEN (1998). **Matemáticas.** Lineamientos Curriculares. Bogotá. Disponible en: https://www.mine-educacion.gov.co/1621/articles89869_archivo_pdf9.pdf.

Mora Saavedra, Juan Carlos (2020). **Geogebra como herramienta de transformación educativa en Matemática.** Mamakuna, (14), pp. 70–81. Recuperado a partir de <https://revistas.unae.edu.ec/index.php/mamakuna-/article/view/349>.

Ñaupas, Humberto; Valdivia, Marcelino; Palacios, Jesús y Romero, Hugo. (2018). **Metodología de la investigación cuantitativa – cualitativa y redacción de la tesis.** Quinta Edición, Ediciones de la U, Bogotá.

Poole, David (2011). **Álgebra lineal, Una introducción moderna.** Cengage Learning Editores. Tercera Edición. México, D.F.

Rodríguez, Ana., Hernández, Albert y Merchán, Martha (2023). Estrategia didáctica de diseño artístico para el desarrollo del pensamiento geométrico espacial. **I+D Revista de Investigaciones**, 18(1), 58-75. <https://www.udi.edu-.co/revistainvestigaciones/index.php/ID/article/-view/362>.

Rodríguez, Lissette., Pérez, Andel., Quero, Oetilio y Rodríguez, Neisy (2021). Tipos de tareas docentes con GeoGebra en la enseñanza de la Matemática. Números, **Revista de Didáctica de las Matemáticas**, 107, 147-167. <http://www.sinewton.org/numeros/numeros/107/-Geogebra.pdf>.

Sambrano, Jazmín (2020). **Métodos de investigación.** Alpha Editorial. 1er Edición. Bogotá.

Van Hiele, Pierre (1999). **Developing geometric thinking through activities that begin with play.** Teaching Children Mathematics. (6), 310-316. https://www.numbersense.co.za/wp-content/uploads/2020/07/Van-Hiele_learning-through-play.pdf.

Vega, Fabián y Ramírez, Gimeno (2019). **Lúdica y comunidad en el desarrollo del pensamiento geométrico.** EDUCACIÓN Y CIENCIA, (22), 489 -504. https://revistas.uptc.edu.co/index.php/educacion_y_ciencia/article/view/10067.