

Relación de dispersión del modo de silbido en plasmas con dos tipos de granos*

*Enrique Castro, Pablo Martín** y Julio Puerta*

Universidad Simón Bolívar, Departamento de Física, Apdo. 89000, Caracas 1080A, Venezuela

Recibido: 30-11-05 Aceptado: 10-04-06

Resumen

Los modos de silbido en plasmas (whistler) con polvo pueden existir en un magnetoplasma con polvo, y su frecuencia es mucho menor que la frecuencia de la onda ciclotrónica. Plasmas "bi-dust" se generan cuando hay dos especies de grano presentes, usualmente en estos casos hay dos escalas de tamaño de los diámetros. La velocidad de grupo el modo de silbido cambia con la frecuencia y la pendiente depende de la masa y carga de cada especie de grano en el plasma. La influencia del grano de tamaño grande es diferente a la del grano fino. Estos efectos son estudiados aquí, así como también las modificaciones de la relación de dispersión debido a las dos especies de granos.

Palabras claves: Plasmas con polvo, modos de silbido, modos de silbido en plasmas con polvo.

Dispersion relation of bi-dust whistler modes

Abstract

Dust whistler modes can exist in a uniform dusty magnetoplasmas and its frequency is much smaller than the cyclotron electron frequency. Bi-dust plasmas are produce when two kind of grains are present, usually there are two-scales of diameters sizes. The dust whistler group velocity changes with frequency and the slope depends of the mass and charge of each kind of dust-grains in the plasma. The influence of the large size grain is different of the fine grain. These effects are studied here, as well as, the modifications of the dispersion relation due to two kind of grains in the plasma.

Key words: dusty plasmas, whistler modes, dust whistler modes.

Introducción

La onda silbido ó "whistler modes" es un fenómeno que ocurre naturalmente en la atmósfera originado por los rayos de la tormentas [1-3]. En la ionosfera existen varias

especies de granos presentes y la influencia de cada especie no es bien conocida.

La característica de este tipo de ondas, es que son de baja frecuencia con respecto a la frecuencia ciclotrónica de los electrones, pero de alta en lo que respecta a la frecuen-

* Trabajo presentado en el V Congreso de la Sociedad Venezolana de Física, Universidad del Zulia. Nucleo Punto Fijo - Edo. Falcón, Venezuela, Noviembre 2005.

** Autor para la correspondencia. E-mail: pmartin@usb.ve

cia ciclotrónica de los iones. En el fenómeno se detectan primero ondas de frecuencia alta, las cuales van disminuyendo con el tiempo. Las frecuencias más altas, por lo tanto, viajan a más velocidad que las bajas, y de ahí el nombre de silbido. Estas frecuencias están entre 100 Hz y 10 KHz.

Es muy posible que en la región del Catatumbo, en Maracaibo, donde se producen constantemente rayos y tormentas la generación de los "whistler modes" sea muy espectacular. En lo que a nosotros alcanzamos a conocer creemos que no se han hecho medidas de este fenómeno en dicha zona. En otro contexto, ondas con dos tipos de granos son de reciente interés industrial y astrofísico [4,5].

Tratamiento Teórico

Para estas ondas el campo magnético exterior se considera uniforme y en la dirección z . La propagación es también a lo largo de esta coordenada. Para ondas circularmente polarizadas a la derecha, el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E}(Z, T) = E_{\perp}(z, t)(\hat{x} + i \hat{y}) \quad [1]$$

Para el presente tratamiento se utilizan las ecuaciones de momento y continuidad para los 4 fluidos cargados: 2 especies de polvo cargado, iones y electrones. El segundo tipo de grano lo diferenciaremos del principal usando una tilde para todas sus variables. De manera que una vez linerizadas las ecuaciones de propagación de ondas, tenemos

$$m_d \frac{\partial \vec{v}_d}{\partial t} = -Z_d e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_d \times \vec{B}}{c}); \frac{\partial n_d}{\partial t} n_{d0} \nabla \cdot \vec{v}_d = 0, [2]$$

$$\tilde{m}_d \frac{\partial \vec{v}_d}{\partial t} = -\tilde{Z}_d e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_d \times \vec{B}}{c}); \frac{\partial \tilde{n}_d}{\partial t} + \tilde{n}_{d0} \nabla \cdot \vec{v}_d = 0 \quad [3]$$

$$m_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -Z_i e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_i \times \vec{B}}{c}); \frac{\partial n_i}{\partial t} + n_{i0} \nabla \cdot \vec{v}_i = 0 \quad [4]$$

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e (\vec{E} + \frac{\vec{v}_e \times \vec{B}}{c}); \frac{\partial n_e}{\partial t} + n_{e0} \nabla \cdot \vec{v}_e = 0 \quad [5]$$

Consideremos además la ecuación de electroneutralidad cuando no hay ondas

$$Z_i n_{i0} - n_{e0} - Z_d n_{d0} - \tilde{Z}_d \tilde{n}_{d0} = 0 \quad [6]$$

junto con las ecuaciones de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad [7]$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi e}{c} (Z_i n_i \vec{v}_i - n_e \vec{v}_e - Z_d n_d \vec{v}_d - \tilde{Z}_d \tilde{n}_d \vec{v}_d) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad [8]$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad [9]$$

El índice "0" significa condiciones de equilibrio y las cantidades sin ese subíndice son las cantidades perturbadas. Se hace un análisis de Fourier para estas ecuaciones, o equivalentemente, todas las variables tienen el factor $e^{i(kz - \omega t)}$. De esta manera se llega a la ecuación de dispersión

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_{ce} - \omega)} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega_{ci} - \omega)} + \frac{\omega_{pd}^2}{\omega(\omega_{cd} - \omega)} + \frac{\tilde{\omega}_{pd}^2}{\omega(\tilde{\omega}_{cd} - \omega)} \quad [10]$$

donde hemos introducido las frecuencias ciclotrónicas de cada una de las especies de plasma $\omega_{ce}, \omega_{ci}, \omega_{cd}$ y $\tilde{\omega}_{cd}$ y las correspondientes frecuencias de plasmas $\omega_{pe}, \omega_{pi}, \omega_{pd}$ y $\tilde{\omega}_{pd}$.

$$\omega_{ce} = \frac{e B_0}{c m_e}, \omega_{ci} = \frac{Z_i e B_0}{c m_i}, \omega_{cd} = \frac{Z_d e B_0}{c m_d}, \tilde{\omega}_{cd} = \frac{\tilde{Z}_d e B_0}{c \tilde{m}_d} \quad [11]$$

$$\omega_{pe}^2 = \frac{4\pi n_{e0} e^2}{m_e}, \omega_{pi}^2 = \frac{4\pi n_{i0} Z_i^2 e^2}{m_i} \quad [12]$$

$$\omega_{pd}^2 = \frac{4\pi n_{d0} Z_d^2 e^2}{m_d}, \tilde{\omega}_{pd}^2 = \frac{4\pi \tilde{n}_{d0} \tilde{Z}_d^2 e^2}{\tilde{m}_d} \quad [13]$$

Es conveniente introducir los factores η y γ definidos como

$$\eta = \frac{\tilde{\omega}_{pd}^2}{\omega_{pd}^2} = \frac{\tilde{n}_{d0} \tilde{Z}_d^2 m_d}{n_d Z_d^2 \tilde{m}_d}, \quad [14]$$

$$\gamma = \frac{\tilde{\omega}_{cd}}{\omega_{cd}} = \frac{\tilde{Z}_d m_d}{Z_d \tilde{m}_d} \quad [15]$$

Conviene además tener frecuencias adimensionales y en este caso como las ondas tienen frecuencias mayores que ω_{ci} pero menores que ω_{ce} la frecuencia de normalización es ω_{ce} . De manera que la ecuación de dispersión a estudiar es

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\Omega_{pe}^2}{\Omega(1-\Omega)} - \frac{\Omega_{pi}^2}{\Omega(\Omega_{cd} - \Omega)} + \frac{\eta \Omega_{pd}^2}{\Omega(\gamma \Omega_{cd} - \Omega)}. \quad [16]$$

donde las frecuencias adimensionales son definidas como

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_{ce}}, \quad \Omega_{ci} = \frac{\omega_{ci}}{\omega_{ce}}, \quad \Omega_{cd} = \frac{\omega_{cd}}{\omega_{ce}}, \quad [17]$$

$$\Omega_{pe} = \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}}, \quad \Omega_{pi} = \frac{\omega_{pi}}{\omega_{ce}}, \quad \Omega_{pd} = \frac{\omega_{pd}}{\omega_{ce}}. \quad [18]$$

La mejor manera de visualizar la ecuación de dispersión en este caso es graficando v_ϕ^2 / c^2 contra Ω siendo v_ϕ la velocidad de fase y c la velocidad de la luz, obteniéndose así

$$\frac{v_\phi^2}{c^2} = \frac{\Omega}{\Omega + \frac{\Omega_{pe}^2}{(1-\Omega)} - \frac{\Omega_{pi}^2}{(\Omega_{ci} + \Omega)} + \frac{\Omega_{pd}^2}{(\Omega_{cd} - \Omega)} + \frac{\eta \Omega_{pd}^2}{(\gamma \Omega_{cd} - \Omega)}}. \quad [19]$$

En las aproximaciones usuales características de los "whistlers modes", se llega a una ecuación de dispersión donde v_ϕ es proporcional a k^2 . En el presente caso, el tratamiento es más elaborado, pero se puede encontrar algo similar como sigue: En primer lugar, hay que hacer la aproximación $\Omega \ll 1$

$\Omega \ll 1$ y $\Omega \gg \Omega_{cd}$ de manera tal que la ecuación de dispersión se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} \frac{c^2}{v_\phi^2} &= 1 + \frac{\Omega_{pe}^2}{\Omega(1-\Omega)} + \frac{\Omega_{pe}^2}{\Omega(\Omega_{ci} + \Omega)} - \frac{\Omega_{pd}^2}{\Omega(\Omega - \Omega_{cd})} - \frac{\eta \Omega_{pd}^2}{\Omega(\Omega - \gamma \Omega_{cd})} \cong \\ &\cong 1 + \frac{\Omega_{pe}^2}{\Omega} + \frac{\Omega_{pi}^2}{\Omega^2} - \frac{\Omega_{pd}^2}{\Omega^2} - \frac{\eta \Omega_{pd}^2}{\Omega^2} \cong 1 \\ &+ \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce} \omega} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pd}^2}{\omega^2} - \frac{\eta \omega_{pd}^2}{\omega^2}, \end{aligned} \quad [20]$$

de todos los términos el más grande es $\omega_{pe}^2 / \omega_{ce} \omega$, de manera que con una nueva aproximación se obtiene

$$\frac{k^2 c^2}{v_\phi^2} \cong \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce} \omega}, \quad [21]$$

y de aquí,

$$\omega \cong \frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} k^2 c^2. \quad [22]$$

Discusión y conclusiones

Un análisis gráfico de la relación de dispersión [19] se puede ver en la figura 2, donde las curvas del cuadrado de la velocidad de fase adimensional versus la frecuencia adimensional Ω se han trazado para diferentes valores de η . En el presente trabajo se han deducido las ecuaciones de dispersión de los modos de silbido, "whistler modes", en plasmas con dos especies granulares.

Si se mantienen fijos los tamaños de los granos, es decir γ constante, y se cambia la razón entre las concentraciones de dichos granos η , se ve que las curvas de la ecuación de dispersión si bien no cambian en forma, sin embargo, las pendientes características de dichas curvas tienen fuertes modificaciones. Esto incide en que las velocidades de propagación de dichos modos van a depender notablemente de las razones entre las concentraciones de las dos especies granulares presentes.

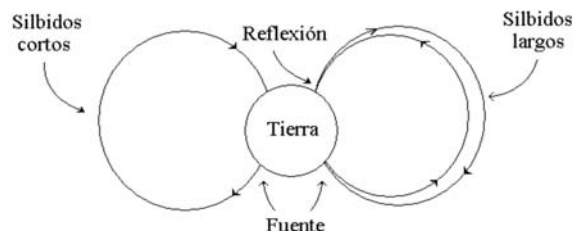


Figura 1. Propagación de las ondas de silbidos "whistler modes" en la magnetosfera terrestre.

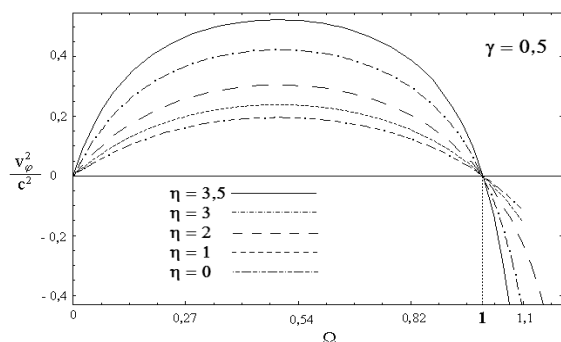


Figura 2. Curvas del cuadrado de la velocidad de fase versus la frecuencia del "whistler mode", para diferentes valores de η , desde 0 hasta 3,5, con $\gamma = 0,5$. Las coordenadas se han adimensionalizado convenientemente.

Referencias

1. SHUKLA P.K., MAMUN A.A. **Introduction to Dusty Plasmas Physics**. IoP Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, ch. 4, 2002.
2. CHEN F.F. **Introduction to Plasma Physics**. Plenum Press, New York, pp. 117-118, 1976.
3. BITTENCOURT J.A. **Fundamentals of Plasma Physics**, Springer, New York, Berlín, Tokyo, third edition, pp. 439-442, 2004.
4. AKDIM M.R., GOEDHEER W.J., DAHIYA R.P. **New Journal of Physics** 5: 20.1-20.14, 2003
5. MARTÍN P., CASTRO E., PUERTA J. **Rev. Mexicana de Física** S-52: 224-226, 2006.